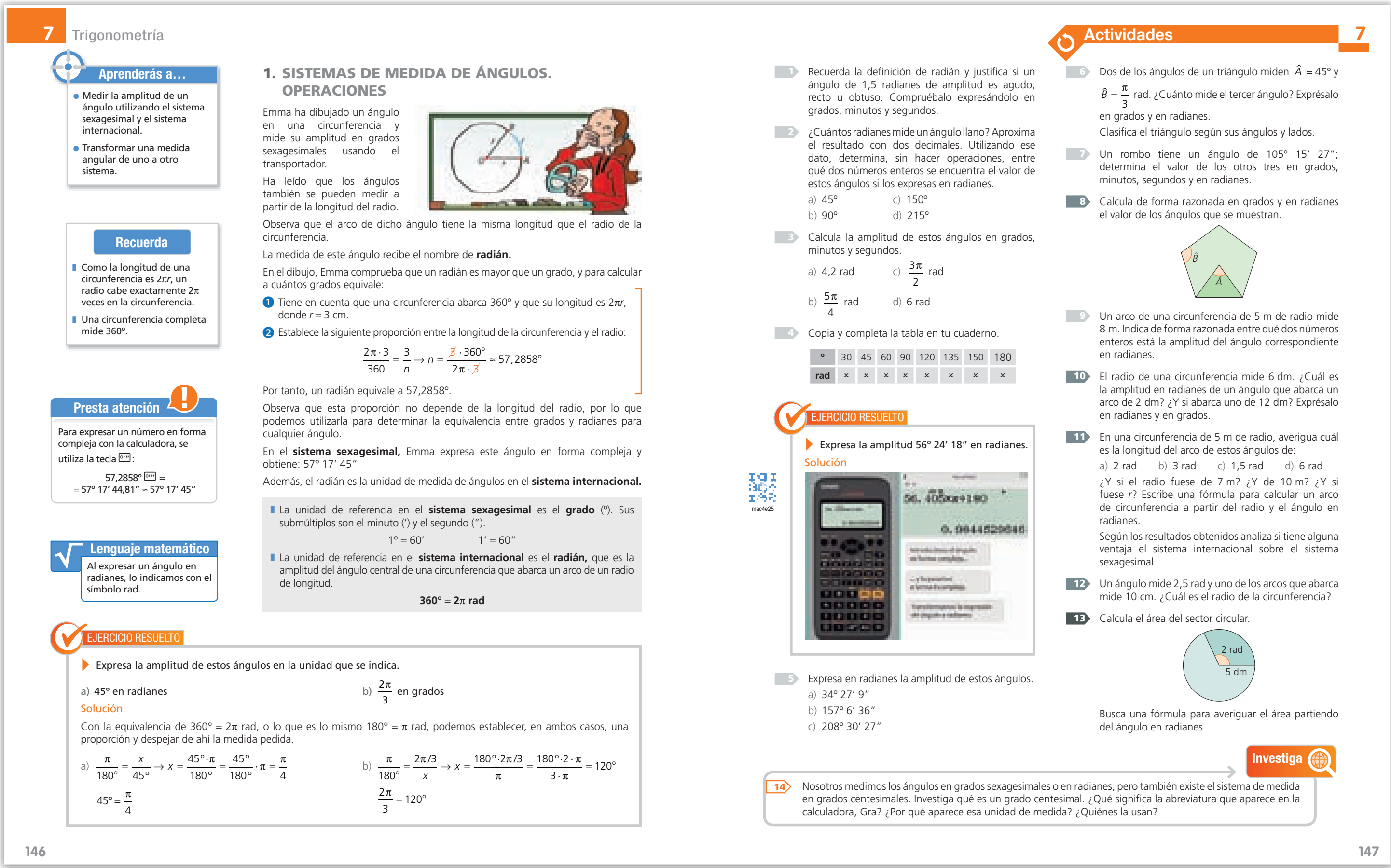
1. Sistemas de medida de ángulos. Operaciones



7 Trigonometría

Aprenderás a…

- Medir la amplitud de un ángulo utilizando el sistema sexagesimal y el sistema internacional.
- Transformar una medida angular de uno a otro sistema.

Recuerda

- Como la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, un radio cabe exactamente 2π veces en la circunferencia.
- Una circunferencia completa mide 360°.

Presta atención

Para expresar un número en forma compleja con la calculadora, se utiliza la tecla °′″:

57,2858° °′″ =
= 57° 17′ 44,81″ ≈ 57° 17′ 45″

Lenguaje matemático

Al expresar un ángulo en radianes, lo indicamos con el símbolo rad.

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS. OPERACIONES

Emma ha dibujado un ángulo en una circunferencia y mide su amplitud en grados sexagesimales usando el transportador.

Ha leído que los ángulos también se pueden medir a partir de la longitud del radio.

Observa que el arco de dicho ángulo tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia.

La medida de este ángulo recibe el nombre de **radián.**

En el dibujo, Emma comprueba que un radián es mayor que un grado, y para calcular a cuántos grados equivale:

1. Tiene en cuenta que una circunferencia abarca 360° y que su longitud es $2\pi r$, donde $r = 3$ cm.
2. Establece la siguiente proporción entre la longitud de la circunferencia y el radio:

$$\frac{2\pi\cdot 3}{360}=\frac{3}{n}\rightarrow n=\frac{\cancel{3}\cdot 360^\circ}{2\pi\cdot\cancel{3}}\approx 57{,}2858^\circ$$

Por tanto, un radián equivale a 57,2858°.

Observa que esta proporción no depende de la longitud del radio, por lo que podemos utilizarla para determinar la equivalencia entre grados y radianes para cualquier ángulo.

En el **sistema sexagesimal,** Emma expresa este ángulo en forma compleja y obtiene: 57° 17′ 45″

Además, el radián es la unidad de medida de ángulos en el **sistema internacional.**

- La unidad de referencia en el **sistema sexagesimal** es el **grado** (°). Sus submúltiplos son el minuto (′) y el segundo (″).

  1° = 60′ 1′ = 60″

- La unidad de referencia en el **sistema internacional** es el **radián,** que es la amplitud del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de un radio de longitud.

  360° = 2π rad

EJERCICIO RESUELTO

Expresa la amplitud de estos ángulos en la unidad que se indica.

a) 45° en radianes b) $\frac{2\pi}{3}$ en grados

Solución

Con la equivalencia de 360° = 2π rad, o lo que es lo mismo 180° = π rad, podemos establecer, en ambos casos, una proporción y despejar de ahí la medida pedida.

a) $\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{x}{45^\circ}\rightarrow x=\frac{45^\circ\cdot\pi}{180^\circ}=\frac{45^\circ}{180^\circ}\cdot\pi=\frac{\pi}{4}$ $45^\circ=\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi/3}{x}\rightarrow x=\frac{180^\circ\cdot 2\pi/3}{\pi}=\frac{180^\circ\cdot 2\cdot\pi}{3\cdot\pi}=120^\circ$ $\frac{2\pi}{3}=120^\circ$

146

Actividades 7

1 Recuerda la definición de radián y justifica si un ángulo de 1,5 radianes de amplitud es agudo, recto u obtuso. Compruébalo expresándolo en grados, minutos y segundos.

2 ¿Cuántos radianes mide un ángulo llano? Aproxima el resultado con dos decimales. Utilizando ese dato, determina, sin hacer operaciones, entre qué dos números enteros se encuentra el valor de estos ángulos si los expresas en radianes.
a) 45° c) 150°
b) 90° d) 215°

3 Calcula la amplitud de estos ángulos en grados, minutos y segundos.
a) 4,2 rad c) $\frac{3\pi}{2}$ rad
b) $\frac{5\pi}{4}$ rad d) 6 rad

4 Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

°	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	×	×	×	×	×	×	×	×

EJERCICIO RESUELTO

Expresa la amplitud 56° 24′ 18″ en radianes.

Solución

mac4e25

5 Expresa en radianes la amplitud de estos ángulos.
a) 34° 27′ 9″
b) 157° 6′ 36″
c) 208° 30′ 27″

6 Dos de los ángulos de un triángulo miden $\hat{A}=45^\circ$ y $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ rad. ¿Cuánto mide el tercer ángulo? Exprésalo en grados y en radianes.
Clasifica el triángulo según sus ángulos y lados.

7 Un rombo tiene un ángulo de 105° 15′ 27″; determina el valor de los otros tres en grados, minutos, segundos y en radianes.

8 Calcula de forma razonada en grados y en radianes el valor de los ángulos que se muestran.

9 Un arco de una circunferencia de 5 m de radio mide 8 m. Indica de forma razonada entre qué dos números enteros está la amplitud del ángulo correspondiente en radianes.

10 El radio de una circunferencia mide 6 dm. ¿Cuál es la amplitud en radianes de un ángulo que abarca un arco de 2 dm? ¿Y si abarca uno de 12 dm? Exprésalo en radianes y en grados.

11 En una circunferencia de 5 m de radio, averigua cuál es la longitud del arco de estos ángulos de:
a) 2 rad b) 3 rad c) 1,5 rad d) 6 rad
¿Y si el radio fuese de 7 m? ¿Y de 10 m? ¿Y si fuese r? Escribe una fórmula para calcular un arco de circunferencia a partir del radio y el ángulo en radianes.
Según los resultados obtenidos analiza si tiene alguna ventaja el sistema internacional sobre el sistema sexagesimal.

12 Un ángulo mide 2,5 rad y uno de los arcos que abarca mide 10 cm. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

13 Calcula el área del sector circular.
2 rad
5 dm
Busca una fórmula para averiguar el área partiendo del ángulo en radianes.

Investiga

14 Nosotros medimos los ángulos en grados sexagesimales o en radianes, pero también existe el sistema de medida en grados centesimales. Investiga qué es un grado centesimal. ¿Qué significa la abreviatura que aparece en la calculadora, Gra? ¿Por qué aparece esa unidad de medida? ¿Quiénes la usan?

147

Sugerencias didácticas

En este primer epígrafe se recuerda el sistema sexagesimal y se introduce la unidad del sistema internacional de medidas para la amplitud de ángulos: el radián. Es importante que comprendan la relación entre radián, radio y longitud de la circunferencia. En este curso seguiremos trabajando básicamente con el sistema sexagesimal. Pero hemos de conseguir que tengan soltura en el cambio de uno a otro (proporción) y que identifiquen de forma aproximada la amplitud de un ángulo cualquiera entre 0 y 2π sin hacer el cambio de unidades.

Sería interesante incidir en la expresión en radianes de los ángulos más representativos: 30°, 45°, 60°...

Vídeo. GRADOS Y RADIANES

En el vídeo se muestra cómo introducir la medida de amplitud de un ángulo dada en grados, minutos y segundos en una calculadora científica y cómo hallar la expresión correspondiente en radianes. Puede reproducirse en clase como apoyo a la explicación de la página anterior o como recurso para que los alumnos investiguen o repasen la utilización de su propia calculadora.

Soluciones de las actividades

1 Recuerda la definición de radián y justifica si un ángulo de 1,5 radianes de amplitud es agudo, recto u obtuso. Compruébalo expresándolo en grados, minutos y segundos.

Un radián es la amplitud de un ángulo central en una circunferencia que abarca un arco de un radio de longitud. Es un ángulo agudo puesto que una circunferencia entera mide $2\pi \approx 6{,}28$ radios, es decir, un cuarto de circunferencia, 90°, serían: $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$ radios. Es decir un radián es menor de 90°.

Para determinar su medida en grados, minutos y segundos despejamos en la proporción entre los radios que caben en una circunferencia y los grados que mide: $\frac{2\pi}{360^\circ}=\frac{1{,}5}{x}\rightarrow x=\frac{360\cdot 1{,}5}{2\pi}\approx 85^\circ\,56'\,37{,}21''$

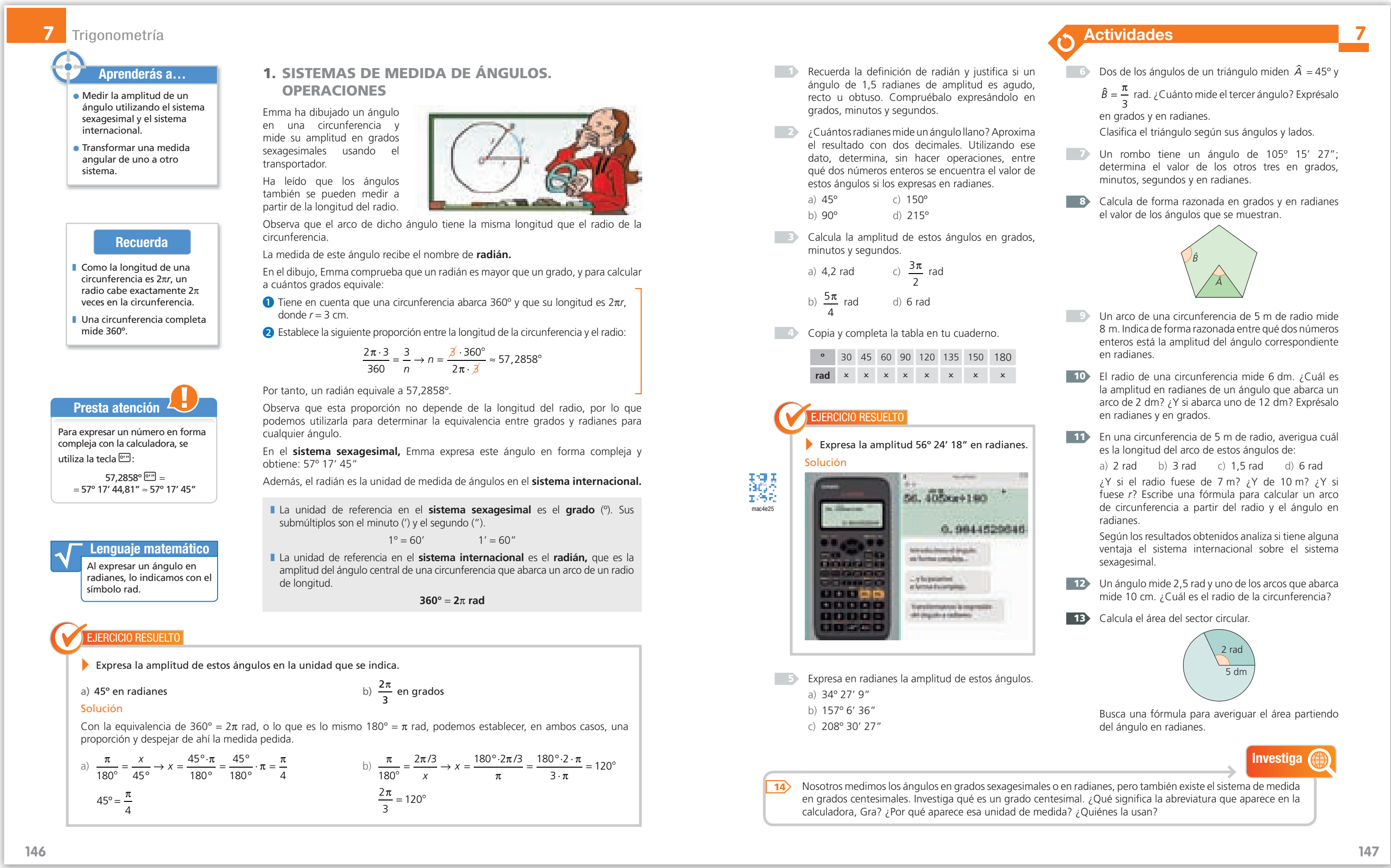
2 ¿Cuántos radianes mide un ángulo llano? Aproxima el resultado con dos decimales. Utilizando ese dato, determina, sin hacer operaciones, entre qué dos números enteros se encuentra el valor de estos ángulos si los expresas en radianes.

a) 45° **b)** 90° **c)** 150° **d)** 215°

Un ángulo llano abarca media circunferencia: $180^\circ=\pi\ \text{rad}=3{,}14\ \text{rad}$

a) $0\ \text{rad}<45^\circ<1\ \text{rad}$ b) $1\ \text{rad}<90^\circ<2\ \text{rad}$ c) $2\ \text{rad}<150^\circ<3\ \text{rad}$ d) $3\ \text{rad}<215^\circ<4\ \text{rad}$

1. Sistemas de medida de ángulos. Operaciones



7 Trigonometría

Aprenderás a…

- Medir la amplitud de un ángulo utilizando el sistema sexagesimal y el sistema internacional.
- Transformar una medida angular de uno a otro sistema.

Recuerda

- Como la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, un radio cabe exactamente 2π veces en la circunferencia.
- Una circunferencia completa mide 360°.

Presta atención

Para expresar un número en forma compleja con la calculadora, se utiliza la tecla °′″:

57,2858° °′″ =
= 57° 17′ 44,81″ ≈ 57° 17′ 45″

Lenguaje matemático

Al expresar un ángulo en radianes, lo indicamos con el símbolo rad.

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS. OPERACIONES

Emma ha dibujado un ángulo en una circunferencia y mide su amplitud en grados sexagesimales usando el transportador.

Ha leído que los ángulos también se pueden medir a partir de la longitud del radio.

Observa que el arco de dicho ángulo tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia.

La medida de este ángulo recibe el nombre de **radián.**

En el dibujo, Emma comprueba que un radián es mayor que un grado, y para calcular a cuántos grados equivale:

1. Tiene en cuenta que una circunferencia abarca 360° y que su longitud es $2\pi r$, donde $r = 3$ cm.
2. Establece la siguiente proporción entre la longitud de la circunferencia y el radio:

$$\frac{2\pi\cdot 3}{360} = \frac{3}{n} \rightarrow n = \frac{\cancel{3}\cdot 360^\circ}{2\pi\cdot\cancel{3}} \approx 57{,}2858^\circ$$

Por tanto, un radián equivale a 57,2858°.

Observa que esta proporción no depende de la longitud del radio, por lo que podemos utilizarla para determinar la equivalencia entre grados y radianes para cualquier ángulo.

En el **sistema sexagesimal,** Emma expresa este ángulo en forma compleja y obtiene: 57° 17′ 45″

Además, el radián es la unidad de medida de ángulos en el **sistema internacional.**

- La unidad de referencia en el **sistema sexagesimal** es el **grado** (°). Sus submúltiplos son el minuto (′) y el segundo (″).

  1° = 60′ 1′ = 60″
- La unidad de referencia en el **sistema internacional** es el **radián,** que es la amplitud del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de un radio de longitud.

  360° = 2π rad

EJERCICIO RESUELTO

Expresa la amplitud de estos ángulos en la unidad que se indica.

a) 45° en radianes b) $\frac{2\pi}{3}$ en grados

Solución

Con la equivalencia de 360° = 2π rad, o lo que es lo mismo 180° = π rad, podemos establecer, en ambos casos, una proporción y despejar de ahí la medida pedida.

a) $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{45^\circ} \rightarrow x = \frac{45^\circ\cdot\pi}{180^\circ} = \frac{45^\circ}{180^\circ}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}$ $45^\circ = \frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi/3}{x} \rightarrow x = \frac{180^\circ\cdot 2\pi/3}{\pi} = \frac{180^\circ\cdot 2\cdot\pi}{3\cdot\pi} = 120^\circ$ $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

146

Actividades 7

1 Recuerda la definición de radián y justifica si un ángulo de 1,5 radianes de amplitud es agudo, recto u obtuso. Compruébalo expresándolo en grados, minutos y segundos.

2 ¿Cuántos radianes mide un ángulo llano? Aproxima el resultado con dos decimales. Utilizando ese dato, determina, sin hacer operaciones, entre qué dos números enteros se encuentra el valor de estos ángulos si los expresas en radianes.
a) 45° c) 150°
b) 90° d) 215°

3 Calcula la amplitud de estos ángulos en grados, minutos y segundos.
a) 4,2 rad c) $\frac{3\pi}{2}$ rad
b) $\frac{5\pi}{4}$ rad d) 6 rad

4 Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

°	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	×	×	×	×	×	×	×	×

EJERCICIO RESUELTO

Expresa la amplitud 56° 24′ 18″ en radianes.

Solución

mac4e25

5 Expresa en radianes la amplitud de estos ángulos.
a) 34° 27′ 9″
b) 157° 6′ 36″
c) 208° 30′ 27″

6 Dos de los ángulos de un triángulo miden $\hat{A} = 45^\circ$ y $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ rad. ¿Cuánto mide el tercer ángulo? Exprésalo en grados y en radianes.
Clasifica el triángulo según sus ángulos y lados.

7 Un rombo tiene un ángulo de 105° 15′ 27″; determina el valor de los otros tres en grados, minutos, segundos y en radianes.

8 Calcula de forma razonada en grados y en radianes el valor de los ángulos que se muestran.

9 Un arco de una circunferencia de 5 m de radio mide 8 m. Indica de forma razonada entre qué dos números enteros está la amplitud del ángulo correspondiente en radianes.

10 El radio de una circunferencia mide 6 dm. ¿Cuál es la amplitud en radianes de un ángulo que abarca un arco de 2 dm? ¿Y si abarca uno de 12 dm? Exprésalo en radianes y en grados.

11 En una circunferencia de 5 m de radio, averigua cuál es la longitud del arco de estos ángulos de:
a) 2 rad b) 3 rad c) 1,5 rad d) 6 rad
¿Y si el radio fuese de 7 m? ¿Y de 10 m? ¿Y si fuese r? Escribe una fórmula para calcular un arco de circunferencia a partir del radio y el ángulo en radianes.
Según los resultados obtenidos analiza si tiene alguna ventaja el sistema internacional sobre el sistema sexagesimal.

12 Un ángulo mide 2,5 rad y uno de los arcos que abarca mide 10 cm. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

13 Calcula el área del sector circular.

2 rad
5 dm

Busca una fórmula para averiguar el área partiendo del ángulo en radianes.

Investiga

14 Nosotros medimos los ángulos en grados sexagesimales o en radianes, pero también existe el sistema de medida en grados centesimales. Investiga qué es un grado centesimal. ¿Qué significa la abreviatura que aparece en la calculadora, Gra? ¿Por qué aparece esa unidad de medida? ¿Quiénes la usan?

147

Sugerencias didácticas

En este primer epígrafe se recuerda el sistema sexagesimal y se introduce la unidad del sistema internacional de medidas para la amplitud de ángulos: el radián. Es importante que comprendan la relación entre radián, radio y longitud de la circunferencia. En este curso seguiremos trabajando básicamente con el sistema sexagesimal. Pero hemos de conseguir que tengan soltura en el cambio de uno a otro (proporción) y que identifiquen de forma aproximada la amplitud de un ángulo cualquiera entre 0 y 2π sin hacer el cambio de unidades.

Sería interesante incidir en la expresión en radianes de los ángulos más representativos: 30°, 45°, 60°...

Vídeo. GRADOS Y RADIANES

En el vídeo se muestra cómo introducir la medida de amplitud de un ángulo dada en grados, minutos y segundos en una calculadora científica y cómo hallar la expresión correspondiente en radianes. Puede reproducirse en clase como apoyo a la explicación de la página anterior o como recurso para que los alumnos investiguen o repasen la utilización de su propia calculadora.

Soluciones de las actividades

1 Recuerda la definición de radián y justifica si un ángulo de 1,5 radianes de amplitud es agudo, recto u obtuso. Compruébalo expresándolo en grados, minutos y segundos.

Un radián es la amplitud de un ángulo central en una circunferencia que abarca un arco de un radio de longitud. Es un ángulo agudo puesto que una circunferencia entera mide $2\pi \approx 6{,}28$ radios, es decir, un cuarto de circunferencia, 90°, serían: $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ radios. Es decir un radián es menor de 90°.

Para determinar su medida en grados, minutos y segundos despejamos en la proporción entre los radios que caben en una circunferencia y los grados que mide: $\frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{1{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{360\cdot 1{,}5}{2\pi} \approx 85^\circ\,56'\,37{,}21''$

2 ¿Cuántos radianes mide un ángulo llano? Aproxima el resultado con dos decimales. Utilizando ese dato, determina, sin hacer operaciones, entre qué dos números enteros se encuentra el valor de estos ángulos si los expresas en radianes.

a) 45° **b)** 90° **c)** 150° **d)** 215°

Un ángulo llano abarca media circunferencia: $180^\circ = \pi \text{ rad} = 3{,}14 \text{ rad}$

a) $0 \text{ rad} < 45^\circ < 1 \text{ rad}$ b) $1 \text{ rad} < 90^\circ < 2 \text{ rad}$ c) $2 \text{ rad} < 150^\circ < 3 \text{ rad}$ d) $3 \text{ rad} < 215^\circ < 4 \text{ rad}$

3 Calcula la amplitud de estos ángulos en grados, minutos y segundos.

a) 4,2 rad **b)** $\frac{5\pi}{4}$ rad **c)** $\frac{3\pi}{2}$ rad **d)** 6 rad

a) $4{,}2 \text{ rad} = \frac{4{,}2 \cdot 180}{\pi} = 240°\ 38'\ 32{,}19''$

b) $\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\frac{5\pi}{4} \cdot 180}{\pi} = 225°$

c) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180}{\pi} = 270°$

d) $6 \text{ rad} = \frac{6 \cdot 180}{\pi} = 343°\ 46'\ 28{,}84''$

4 Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

°	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

5 Expresa en radianes la amplitud de estos ángulos.

a) 34° 27′ 9″ **b)** 157° 6′ 36″ **c)** 208° 30′ 27″

a) $34°\ 27'\ 9'' = 0{,}6013095...$ b) $157°\ 6'\ 36'' = 2{,}742086...$ c) $208°\ 30'\ 27'' = 3{,}639142...$

6 Dos de los ángulos de un triángulo miden $\hat{A} = 45°$ y $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ rad. ¿Cuánto mide el tercer ángulo? Exprésalo en grados y en radianes.

Clasifica el triángulo según sus ángulos y lados.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow \hat{C} = 180° - (45° + 60°) = 75° = \frac{75° \cdot \pi}{180°} \approx 1{,}3090 \text{ rad}$

El triángulo es acutángulo pues sus tres ángulos son agudos, y escaleno pues si sus tres ángulos tienen distintas amplitudes sus lados tienen distintas longitudes.

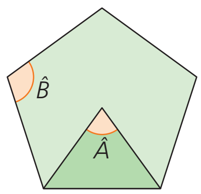
7 Un rombo tiene un ángulo de 105° 15′ 27″; determina el valor de los otros tres en grados, minutos, segundos y en radianes.

Un rombo tiene los ángulos iguales dos a dos. Los ángulos consecutivos son complementarios:

$\hat{A} + \hat{B} = 180° \rightarrow \hat{B} = 180° - (105°\ 15'\ 27'') = 74°\ 44'\ 33''$

Los ángulos opuestos tienen la misma amplitud: $\hat{A} = \hat{C} = 105°\ 15'\ 27'' = 1{,}837 \text{ rad}$ $\hat{B} = \hat{D} = 74°\ 44'\ 33'' = 1{,}3045 \text{ rad}$

8 Calcula de forma razonada en grados y en radianes el valor de los ángulos que se muestran.



El ángulo $\hat{A}$ es el ángulo central de un pentágono regular: $\hat{A} = \frac{360°}{5} = 72° = 1{,}2566 \text{ rad}$

Y $\hat{B}$ es el ángulo interior, suma de los dos ángulos iguales del triángulo central, suplementario de $\hat{A}$.

$$\hat{B} = 180° - 72° = 108° = 1{,}8850 \text{ rad}$$

9 Un arco de una circunferencia de 5 m de radio mide 8 m. Indica de forma razonada entre qué dos números enteros está la amplitud del ángulo correspondiente en radianes.

La longitud del arco está entre uno y dos radios: $5 \text{ m} < 8 \text{ m} < 2 \cdot 5 \text{ m}$ y por tanto la amplitud del ángulo estará entre 1 rad y 2 rad.

10 El radio de una circunferencia mide 6 dm. ¿Cuál es la amplitud en radianes de un ángulo que abarca un arco de 2 dm? ¿Y si abarca uno de 12 dm? Exprésalo en radianes y en grados.

Si el ángulo abarca un arco de 2 dm que es la tercera parte del radio, mide $\frac{1}{3}$ rad.

$$2\ \text{dm} = \frac{6}{3} = \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{1}{3}\ \text{rad} = 19°\ 5'\ 54{,}94''$$

Y si abarca 12 dm que es el doble del radio medirá 2 rad: $12\ \text{dm} = 2 \cdot 6 = 2\ \text{rad} = 114°\ 35'\ 29{,}61''$

11 En una circunferencia de 5 m de radio, averigua cuál es la longitud del arco de estos ángulos de:

a) 2 rad **b)** 3 rad **c)** 1,5 rad **d)** 6 rad

¿Y si el radio fuese de 7 m? ¿Y de 10 m? ¿Y si fuese r? Escribe una fórmula para calcular un arco de circunferencia a partir del radio y el ángulo en radianes.

Según los resultados obtenidos analiza si tiene alguna ventaja el sistema internacional sobre el sistema sexagesimal.

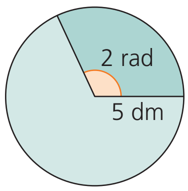
	2 rad	**3 rad**	**1,5 rad**	**6 rad**
$r = 5$ m	$2 \cdot 5 = 10$ m	$3 \cdot 5 = 15$ m	$1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$ m	$6 \cdot 5 = 30$ m
$r = 7$ m	$2 \cdot 7 = 14$ m	$3 \cdot 7 = 21$ m	$1{,}5 \cdot 7 = 10{,}5$ m	$6 \cdot 7 = 42$ m
$r = 10$ m	$2 \cdot 10 = 20$ m	$3 \cdot 10 = 30$ m	$1{,}5 \cdot 10 = 15$ m	$6 \cdot 10 = 60$ m
r	$2 \cdot r$	$3 \cdot r$	$1{,}5 \cdot r$	$6 \cdot r$

Para determinar la longitud del arco basta con multiplicar los radianes por la longitud del radio: $L_{\text{arco}} = r \cdot \text{amplitud (rad)}$. Para calcular longitudes sobre la circunferencia o trayectorias es más sencillo.

12 Un ángulo mide 2,5 rad y uno de los arcos que abarca mide 10 cm. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

Despejando de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior: $r = \dfrac{L_{\text{arco}}}{\text{amplitud (rad)}} = \dfrac{10}{2{,}5} = 4\ \text{cm}$

13 Calcula el área del sector circular.



Busca una fórmula para averiguar el área partiendo del ángulo en radianes.

Teniendo en cuenta el cambio de unidades:

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2}{360°} \cdot \text{amplitud (°)} = \frac{\cancel{\pi} \cdot r^2}{2\cancel{\pi}} \cdot \text{amplitud (rad)}$$

Entonces: $A_{\text{sector circular}} = \dfrac{\text{amplitud (rad)}}{2} \cdot r^2 = \dfrac{2}{2} \cdot 5^2 = 25\ \text{dm}^2$

Investiga

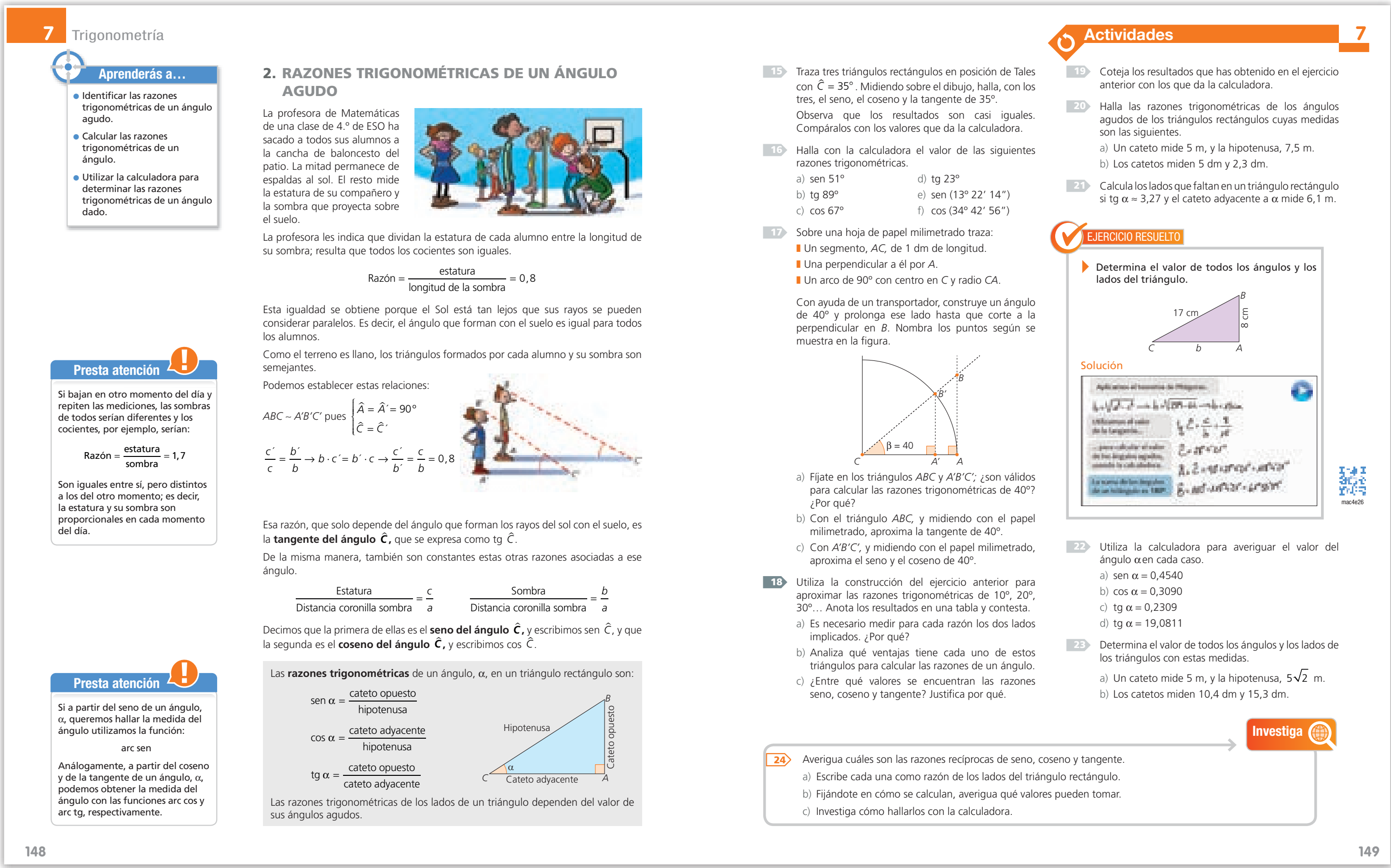
14 Nosotros medimos los ángulos en grados sexagesimales o en radianes, pero también existe el sistema de medida en grados centesimales. Investiga qué es un grado centesimal. ¿Qué significa la abreviatura que aparece en la calculadora, Gra? ¿Por qué aparece esa unidad de medida? ¿Quiénes la usan?

Los grados centesimales, o gradianes (Gra), son una alternativa a los grados sexagesimales que representa $\frac{1}{400}$ de la circunferencia.

Surge de la división del plano en 400 ángulos iguales con vértice común, de modo que un cuadrante corresponde a 100 grados centesimales. La división en minutos y segundos se hace de 100 en 100 partes iguales, en lugar de 60 en 60.

Se utiliza en topografía e ingenería civil.

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo


7 Trigonometría

Aprenderás a…
- Identificar las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Calcular las razones trigonométricas de un ángulo.
- Utilizar la calculadora para determinar las razones trigonométricas de un ángulo dado.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

La profesora de Matemáticas de una clase de 4.º de ESO ha sacado a todos sus alumnos a la cancha de baloncesto del patio. La mitad permanece de espaldas al sol. El resto mide la estatura de su compañero y la sombra que proyecta sobre el suelo.

La profesora les indica que dividan la estatura de cada alumno entre la longitud de su sombra; resulta que todos los cocientes son iguales.

$$\text{Razón} = \frac{\text{estatura}}{\text{longitud de la sombra}} = 0{,}8$$

Esta igualdad se obtiene porque el Sol está tan lejos que sus rayos se pueden considerar paralelos. Es decir, el ángulo que forman con el suelo es igual para todos los alumnos.

Como el terreno es llano, los triángulos formados por cada alumno y su sombra son semejantes.

Podemos establecer estas relaciones:

$$ABC \sim A'B'C' \text{ pues } \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' = 90° \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} \rightarrow b \cdot c' = b' \cdot c \rightarrow \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b} = 0{,}8$$

Esa razón, que solo depende del ángulo que forman los rayos del sol con el suelo, es la **tangente del ángulo $\hat{C}$**, que se expresa como tg $\hat{C}$.

De la misma manera, también son constantes estas otras razones asociadas a ese ángulo.

$$\frac{\text{Estatura}}{\text{Distancia coronilla sombra}} = \frac{c}{a} \qquad \frac{\text{Sombra}}{\text{Distancia coronilla sombra}} = \frac{b}{a}$$

Decimos que la primera de ellas es el **seno del ángulo $\hat{C}$**, y escribimos sen $\hat{C}$, y que la segunda es el **coseno del ángulo $\hat{C}$**, y escribimos cos $\hat{C}$.

Las **razones trigonométricas** de un ángulo, α, en un triángulo rectángulo son:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Las razones trigonométricas de los lados de un triángulo dependen del valor de sus ángulos agudos.

Presta atención
Si bajan en otro momento del día y repiten las mediciones, las sombras de todos serían diferentes y los cocientes, por ejemplo, serían:

$$\text{Razón} = \frac{\text{estatura}}{\text{sombra}} = 1{,}7$$

Son iguales entre sí, pero distintos a los del otro momento; es decir, la estatura y su sombra son proporcionales en cada momento del día.

Presta atención
Si a partir del seno de un ángulo, α, queremos hallar la medida del ángulo utilizamos la función: arc sen

Análogamente, a partir del coseno y de la tangente de un ángulo, α, podemos obtener la medida del ángulo con las funciones arc cos y arc tg, respectivamente.

15 Traza tres triángulos rectángulos en posición de Tales con $\hat{C} = 35°$. Midiendo sobre el dibujo, halla, con los tres, el seno, el coseno y la tangente de 35°. Observa que los resultados son casi iguales. Compáralos con los valores que da la calculadora.

16 Halla con la calculadora el valor de las siguientes razones trigonométricas.
a) sen 51° b) tg 89° c) cos 67° d) tg 23° e) sen (13° 22′ 14″) f) cos (34° 42′ 56″)

17 Sobre una hoja de papel milimetrado traza:
- Un segmento, *AC*, de 1 dm de longitud.
- Una perpendicular a él por *A*.
- Un arco de 90° con centro en *C* y radio *CA*.

Con ayuda de un transportador, construye un ángulo de 40° y prolonga ese lado hasta que corte a la perpendicular en *B*. Nombra los puntos según se muestra en la figura.

a) Fíjate en los triángulos *ABC* y *A′B′C′*; ¿son válidos para calcular las razones trigonométricas de 40°? ¿Por qué?
b) Con el triángulo *ABC*, y midiendo con el papel milimetrado, aproxima la tangente de 40°.
c) Con *A′B′C′*, y midiendo con el papel milimetrado, aproxima el seno y el coseno de 40°.

18 Utiliza la construcción del ejercicio anterior para aproximar las razones trigonométricas de 10°, 20°, 30°… Anota los resultados en una tabla y contesta.
a) Es necesario medir para cada razón los dos lados implicados. ¿Por qué?
b) Analiza qué ventajas tiene cada uno de estos triángulos para calcular las razones de un ángulo.
c) ¿Entre qué valores se encuentran las razones seno, coseno y tangente? Justifica por qué.

Actividades

19 Coteja los resultados que has obtenido en el ejercicio anterior con los que da la calculadora.

20 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos cuyas medidas son las siguientes.
a) Un cateto mide 5 m, y la hipotenusa, 7,5 m.
b) Los catetos miden 5 dm y 2,3 dm.

21 Calcula los lados que faltan en un triángulo rectángulo si tg α = 3,27 y el cateto adyacente a α mide 6,1 m.

EJERCICIO RESUELTO
Determina el valor de todos los ángulos y los lados del triángulo.

Solución

22 Utiliza la calculadora para averiguar el valor del ángulo α en cada caso.
a) sen α = 0,4540
b) cos α = 0,3090
c) tg α = 0,2309
d) tg α = 19,0811

23 Determina el valor de todos los ángulos y los lados de los triángulos con estas medidas.
a) Un cateto mide 5 m, y la hipotenusa, $5\sqrt{2}$ m.
b) Los catetos miden 10,4 dm y 15,3 dm.

Investiga

24 Averigua cuáles son las razones recíprocas de seno, coseno y tangente.
a) Escribe cada una como razón de los lados del triángulo rectángulo.
b) Fijándote en cómo se calculan, averigua qué valores pueden tomar.
c) Investiga cómo hallarlos con la calculadora.

148 149

Sugerencias didácticas

En este epígrafe se muestran por primera vez las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Después de haber repasado la semejanza de triángulos en la unidad anterior, la utilizamos en este epígrafe para comprobar que la razón entre los lados de un triángulo rectángulo es constante y solo depende del valor del ángulo correspondiente y no del tamaño del triángulo. Para que los alumnos comprendan que las razones están relacionadas con el valor del ángulo y ver cómo varía cada una de ellas es interesante que manipulen con triángulos, con lápiz y papel o GeoGebra, como en el ejercicio 17. Ellos deben descubrir cómo varían las tres razones dependiendo de la amplitud del ángulo.

Vídeo. LADOS Y ÁNGULOS

En el recurso se resuelve paso a paso el ejercicio resuelto de la página de Actividades, aplicando el teorema de Pitágoras y relacionando las longitudes de los lados mediante las razones trigonométricas para hallar la amplitud de los ángulos. El cálculo del ángulo cuya tangente se indica se realiza con la calculadora científica usando la función inversa correspondiente. Puede reproducirse en clase para completar la explicación de la página anterior o para que los alumnos repasen el procedimiento para resolver un triángulo rectángulo más tarde.

Soluciones de las actividades

15 Traza tres triángulos rectángulos en posición de Tales con $\hat{C} = 35°$. Midiendo sobre el dibujo, halla, con los tres, el seno, el coseno y la tangente de 35°.

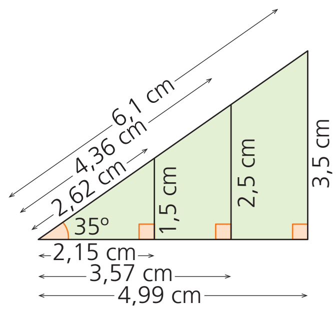
Observa que los resultados son casi iguales. Compáralos con los valores que da la calculadora.

Respuesta abierta. La solución debería quedar así:

$$\text{sen } 35° = 0{,}5735764\ldots \rightarrow \frac{1{,}5}{2{,}62} = 0{,}5725\ldots;\ \frac{2{,}5}{4{,}36} = 0{,}5733\ldots;\ \frac{3{,}5}{6{,}1} = 0{,}5737\ldots$$

$$\cos 35° = 0{,}8191520\ldots \rightarrow \frac{2{,}15}{2{,}62} = 0{,}8206\ldots;\ \frac{3{,}57}{4{,}36} = 0{,}8188\ldots;\ \frac{4{,}99}{6{,}1} = 0{,}8180\ldots$$

$$\tan 35° = 0{,}700207\ldots \rightarrow \frac{1{,}5}{2{,}15} = 0{,}6976\ldots;\ \frac{2{,}5}{3{,}57} = 0{,}7002\ldots;\ \frac{3{,}5}{4{,}99} = 0{,}7014\ldots$$



16 Halla con la calculadora el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 51° **c)** cos 67° **e)** sen (13° 22′ 14″)

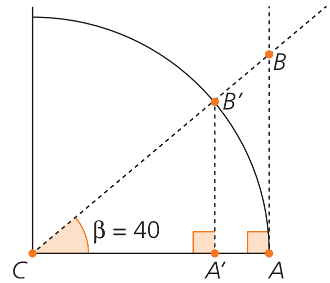
b) tg 89° **d)** tg 23° **f)** cos (34° 42′ 56″)

a) sen 51° ≈ 0,777145961… c) cos 67° ≈ 0,390731128… e) sen (13° 22′ 14″) ≈ 0,23124796…

b) tg 89° ≈ 57,2899616… d) tg 23° ≈ 0,424474816… f) cos (34° 42′ 56″) ≈ 0,821989453…

17 Sobre una hoja de papel milimetrado traza:

- Un segmento, *AC*, de 1 dm de longitud.
- Una perpendicular a él por *A*.
- Un arco de 90° con centro en *C* y radio *CA*.



Con ayuda de un transportador, construye un ángulo de 40° y prolonga ese lado hasta que corte a la perpendicular en *B*. Nombra los puntos según se muestra en la figura.

a) Fíjate en los triángulos *ABC* y *A′B′C′*; ¿son válidos para calcular las razones trigonométricas de 40°? ¿Por qué?

b) Con el triángulo *ABC*, y midiendo con el papel milimetrado, aproxima la tangente de 40°.

c) Con *A′B′C′*, y midiendo con el papel milimetrado, aproxima el seno y el coseno de 40°.

a) Sí son válidos porque son triángulos rectángulos con un ángulo agudo de 40° de amplitud.

b) $\text{tg } 40° \approx \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \dfrac{8,4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0,84$

c) $\text{sen } 40° \approx \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{CB'}} = \dfrac{6,4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0,64, \cos 40° \approx \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}} = \dfrac{7,65 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0,765$

18 Utiliza la construcción del ejercicio anterior para aproximar las razones trigonométricas de 10°, 20°, 30°… Anota los resultados en una tabla y contesta.

a) ¿Es necesario medir para cada razón los dos lados implicados? ¿Por qué?

b) Analiza qué ventajas tiene cada uno de estos triángulos para calcular las razones de un ángulo.

c) ¿Entre qué valores se encuentran las razones seno, coseno y tangente? Justifica por qué.

	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
seno	0,17	0,34	0,5	0,64	0,765	0,865	0,94	0,98
coseno	0,985	0,94	0,865	0,765	0,64	0,5	0,34	0,17
tangente	0,175	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67

a) No, con un triángulo así construido, una de las dos longitudes es de un radio, 1 dm.

b) Midiendo en centímetros, basta con dividir la longitud que no corresponde con un radio, entre 10.

c) El seno y el coseno son razones entre las longitudes de los catetos y la hipotenusa y por tanto, positivas. Al ser esta el lado más largo en un triángulo rectángulo, las razones serán siempre inferiores a 1. Es decir, los valores del seno y del coseno de un ángulo agudo varían entre 0 y 1.

Para la tangente no están acotados los valores, su valor puede ser cualquier número positivo.

19 Coteja los resultados que has obtenido en el ejercicio anterior con los que da la calculadora.

	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
seno	0,1736	0,342	0,5	0,6427	0,766	0,866	0,9396	0,9848
coseno	0,9848	0,9396	0,866	0,766	0,6427	0,5	0,342	0,1736
tangente	0,1763	0,3639	0,5773	0,839	1,1917	1,732	2,7474	5,6712

20 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos cuyas medidas son las siguientes.

a) Un cateto mide 5 m, y la hipotenusa, 7,5 m.

b) Los catetos miden 5 dm y 2,3 dm.

a) Llamamos $a = 7,5$ m, a la hipotenusa y $b = 5$ m, al cateto. Determinamos primero la longitud del cateto que falta aplicando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{7,5^2 - 5^2} \approx 5,6 \text{ m}$

Así las razones de sus ángulos son:

$\hat{B} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{5}{7,5} = 0,666...;\ \cos \hat{B} = \frac{c}{a} \approx \frac{5,6}{7,5} = 0,7466...;\ \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \approx \frac{5}{5,6} = 0,892...$

$\hat{C} \rightarrow \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a} \approx \frac{5,6}{7,5} = 0,7466...;\ \cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{5}{7,5} = 0,666...;\ \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} \approx \frac{5,6}{5} = 1,12$

b) Llamamos $b = 5$ dm, a un cateto y $c = 2,3$ dm, al otro. Determinamos primero la longitud de la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{5^2 + 2,3^2} \approx 5,5$ dm

Así las razones de sus ángulos son:

$\hat{B} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \approx \frac{5}{5,5} = 0,9090...;\ \cos \hat{B} = \frac{c}{a} \approx \frac{2,3}{5,5} = 0,4181...;\ \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{5}{2,3} = 2,1739...$

$\hat{C} \rightarrow \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a} \approx \frac{2,3}{5,5} = 0,4181...;\ \cos \hat{C} = \frac{b}{a} \approx \frac{5}{5,5} = 0,9090...;\ \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{2,3}{5} = 0,46$

21 Calcula los lados que faltan en un triángulo rectángulo si tg $\alpha \approx 3,27$ y el cateto adyacente a α mide 6,1 m.

A partir de la tangente hallamos el valor del otro cateto y con él, el de la hipotenusa aplicando el teorema de el teorema de Pitágoras.

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \rightarrow \frac{\text{cateto opuesto}}{6,1} = 3,27 \rightarrow \text{cateto opuesto} = 19,947 \text{ m}$

$\text{Hipotenusa} = \sqrt{6,1^2 + 19,947^2} \approx 20,859 \text{ m}$

22 Utiliza la calculadora para averiguar el valor del ángulo α en cada caso.

a) sen $\alpha = 0,4540$ **b)** cos $\alpha = 0,3090$ **c)** tg $\alpha = 0,2309$ **d)** tg $\alpha = 19,0811$

a) $\alpha = \text{arc sen } 0,4540 \approx 27°$ **b)** $\alpha = \text{arc cos } 0,3090 \approx 72°$ **c)** $\alpha = \text{arc tg } 0,2309 \approx 13°$ **d)** $\alpha = \text{arc tg } 19,0811 \approx 87°$

23 Determina el valor de todos los ángulos y los lados de los triángulos con estas medidas.

a) Un cateto mide 5 m, y la hipotenusa, $5\sqrt{2}$ m. **b)** Los catetos miden 10,4 dm y 15,3 dm.

a) Con un cateto y la hipotenusa hallamos un ángulo agudo: $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = \text{arc sen } \frac{5}{5\sqrt{2}} = 45°$

El otro ángulo será su complementario: $\beta = 90° - 45° = 45°$

Al ser un triángulo isósceles el otro cateto mide también 5 m.

b) Con los catetos calculamos uno de los ángulos agudos: $\text{tg } \alpha = \frac{10,4}{15,3} \rightarrow \alpha = \text{arc tg } \frac{10,4}{15,3} = 34°\ 12'\ 19,65''$

El otro ángulo será su complementario: $\beta = 90° - (34°\ 12'\ 19,65'') = 55°\ 47'\ 40,35''$

Para determinar la longitud de la hipotenusa aplicamos el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{10,4^2 + 15,3^2} = 18,5$ dm

Investiga

24 Averigua cuáles son las razones recíprocas del seno, coseno y tangente.

a) Escribe cada una como razón de los lados del triángulo rectángulo.

b) Fijándote en cómo se calculan, averigua qué valores pueden tomar.

c) Investiga cómo hallarlos con la calculadora.

a) Las razones recíprocas son:

seno $\rightarrow$ cosecante: $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

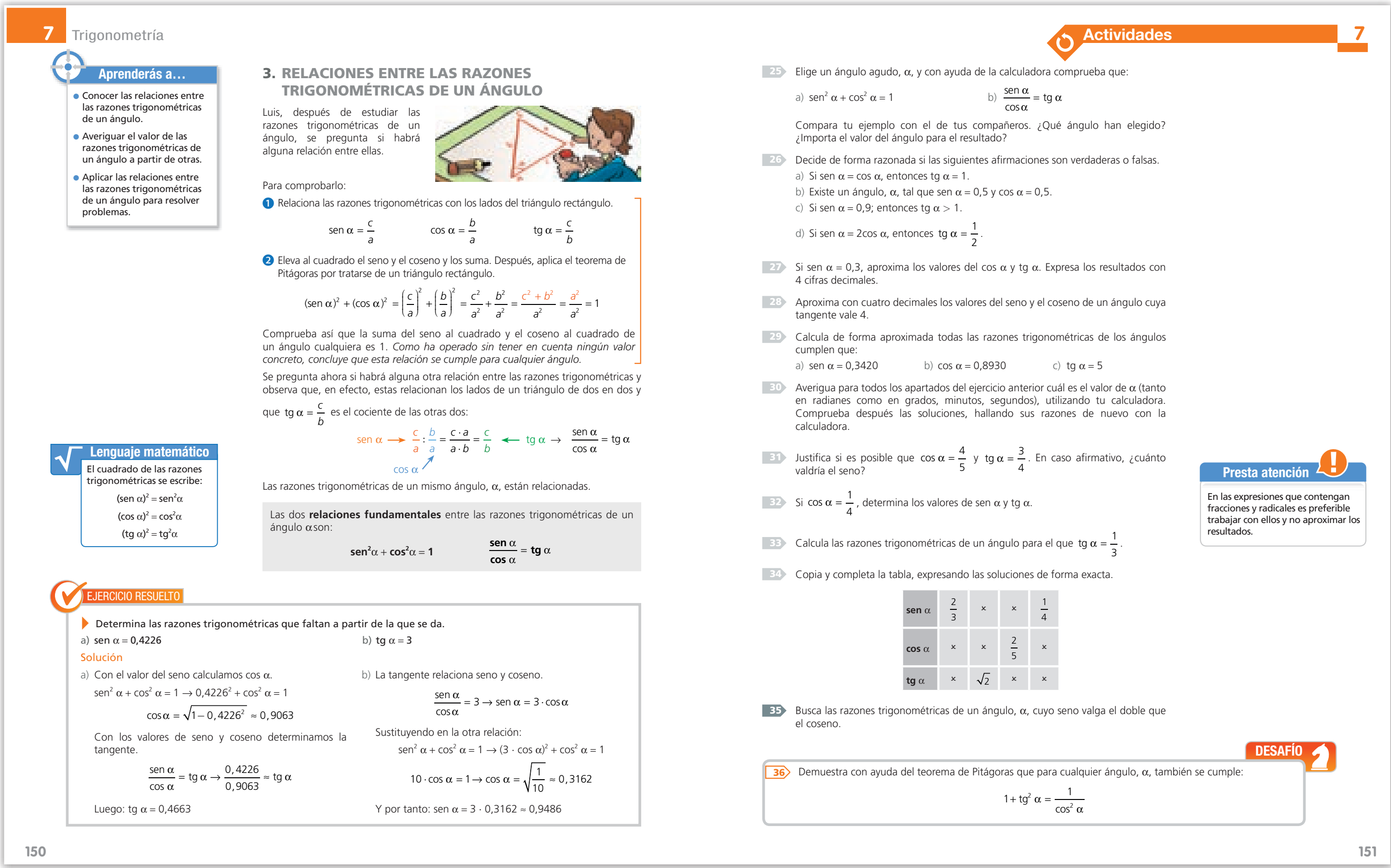
coseno $\rightarrow$ secante: $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

tangente $\rightarrow$ cotangente: $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

b) Teniendo en cuenta la relación de tamaño entre los catetos y la hipotenusa, cosecante y secante tendrán valores estrictamente mayores que uno y la cotangente tomará cualquier valor positivo.

c) Las tres razones son las inversas con respecto a la multiplicación, se pueden calcular con el botón x^{-1} y a continuación la razón correspondiente.

3. Relaciones entre las razones trigonométricas de un triángulo



7 Trigonometría

Aprenderás a…

- Conocer las relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo.
- Averiguar el valor de las razones trigonométricas de un ángulo a partir de otras.
- Aplicar las relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo para resolver problemas.

3. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

Luis, después de estudiar las razones trigonométricas de un ángulo, se pregunta si habrá alguna relación entre ellas.

Para comprobarlo:

1 Relaciona las razones trigonométricas con los lados del triángulo rectángulo.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{c}{b}$$

2 Eleva al cuadrado el seno y el coseno y los suma. Después, aplica el teorema de Pitágoras por tratarse de un triángulo rectángulo.

$$(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Comprueba así que la suma del seno al cuadrado y el coseno al cuadrado de un ángulo cualquiera es 1. *Como ha operado sin tener en cuenta ningún valor concreto, concluye que esta relación se cumple para cualquier ángulo.*

Se pregunta ahora si habrá alguna otra relación entre las razones trigonométricas y observa que, en efecto, estas relacionan los lados de un triángulo de dos en dos y que $\text{tg}\,\alpha = \frac{c}{b}$ es el cociente de las otras dos:

$$\text{sen}\,\alpha \rightarrow \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c\cdot a}{a\cdot b} = \frac{c}{b} \leftarrow \text{tg}\,\alpha \rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$$

$\cos\alpha$

Las razones trigonométricas de un mismo ángulo, α, están relacionadas.

Lenguaje matemático

El cuadrado de las razones trigonométricas se escribe:

$(\text{sen}\,\alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha$

$(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

$(\text{tg}\,\alpha)^2 = \text{tg}^2\alpha$

Las dos **relaciones fundamentales** entre las razones trigonométricas de un ángulo α son:

$$\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1} \qquad \frac{\mathbf{sen}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = \mathbf{tg}\,\alpha$$

EJERCICIO RESUELTO

Determina las razones trigonométricas que faltan a partir de la que se da.

a) $\text{sen}\,\alpha = 0{,}4226$ b) $\text{tg}\,\alpha = 3$

Solución

a) Con el valor del seno calculamos cos α.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0{,}4226^2 + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}4226^2} \approx 0{,}9063$$

Con los valores de seno y coseno determinamos la tangente.

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha \rightarrow \frac{0{,}4226}{0{,}9063} \approx \text{tg}\,\alpha$$

Luego: $\text{tg}\,\alpha = 0{,}4663$

b) La tangente relaciona seno y coseno.

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 3 \rightarrow \text{sen}\,\alpha = 3\cdot\cos\alpha$$

Sustituyendo en la otra relación:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow (3\cdot\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$$10\cdot\cos\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} \approx 0{,}3162$$

Y por tanto: $\text{sen}\,\alpha = 3\cdot 0{,}3162 \approx 0{,}9486$

150

Actividades 7

25 Elige un ángulo agudo, α, y con ayuda de la calculadora comprueba que:

a) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ b) $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

Compara tu ejemplo con el de tus compañeros. ¿Qué ángulo han elegido? ¿Importa el valor del ángulo para el resultado?

26 Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$, entonces $\text{tg}\,\alpha = 1$.
b) Existe un ángulo, α, tal que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}5$ y $\cos\alpha = 0{,}5$.
c) Si $\text{sen}\,\alpha = 0{,}9$; entonces $\text{tg}\,\alpha > 1$.
d) Si $\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$, entonces $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$.

27 Si $\text{sen}\,\alpha = 0{,}3$, aproxima los valores del cos α y tg α. Expresa los resultados con 4 cifras decimales.

28 Aproxima con cuatro decimales los valores del seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 4.

29 Calcula de forma aproximada todas las razones trigonométricas de los ángulos cumplen que:

a) $\text{sen}\,\alpha = 0{,}3420$ b) $\cos\alpha = 0{,}8930$ c) $\text{tg}\,\alpha = 5$

30 Averigua para todos los apartados del ejercicio anterior cuál es el valor de α (tanto en radianes como en grados, minutos, segundos), utilizando tu calculadora. Comprueba después las soluciones, hallando sus razones de nuevo con la calculadora.

31 Justifica si es posible que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$. En caso afirmativo, ¿cuánto valdría el seno?

32 Si $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, determina los valores de sen α y tg α.

33 Calcula las razones trigonométricas de un ángulo para el que $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$.

34 Copia y completa la tabla, expresando las soluciones de forma exacta.

sen α	$\frac{2}{3}$	×	×	$\frac{1}{4}$
cos α	×	×	$\frac{2}{5}$	×
tg α	×	$\sqrt{2}$	×	×

35 Busca las razones trigonométricas de un ángulo, α, cuyo seno valga el doble que el coseno.

Presta atención

En las expresiones que contengan fracciones y radicales es preferible trabajar con ellos y no aproximar los resultados.

DESAFÍO

36 Demuestra con ayuda del teorema de Pitágoras que para cualquier ángulo, α, también se cumple:

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

151

Sugerencias didácticas

En este epígrafe se demuestran las relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo. Como conocen la definición de las razones, podemos preguntarles si creen que existe alguna relación entre ellas. Si van sugiriendo ideas aparecerá el teorema de Pitágoras y si, en todas las razones intervienen los mismos números, el valor de una depende del de las otras.

Esto dará pie a la demostración formal.

Los alumnos de este curso ya tienen capacidad para comprender, y hacer, demostraciones. Tras analizar las demostraciones que aparecen en la teoría sería bueno proponerles el Desafío y ver si son capaces de seguir el razonamiento solos.

Soluciones de las actividades

25 Elige un ángulo agudo, α, y con ayuda de la calculadora comprueba que:

a) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ b) $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

Compara tu ejemplo con el de tus compañeros. ¿Qué ángulo han elegido? ¿Importa el valor del ángulo para el resultado?

Respuesta abierta. Deberían introducir toda la secuencia seguida para evitar los errores de aproximación. Que prueben con distintas medidas. No importa el valor del ángulo elegido, las igualdades se cumplen.

26 Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$, entonces $\text{tg}\,\alpha = 1$.
b) Existe un ángulo, α, tal que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}5$ y $\cos\alpha = 0{,}5$.
c) Si $\text{sen}\,\alpha = 0{,}9$; entonces $\text{tg}\,\alpha > 1$.
d) Si $\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$, entonces $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$.

a) Verdadera. Si ambas razones son iguales, su cociente es la unidad: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 1$

b) Falsa. Sabemos que $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y sin embargo: $0{,}5^2 + 0{,}5^2 = 0{,}5 \neq 1$

c) Verdadera. Si $\text{sen}\,\alpha = 0{,}9 \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha} = \sqrt{0{,}19} \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{0{,}9}{\sqrt{0{,}19}} = 2{,}06\ldots > 1$

d) Falsa. Sería el inverso, esto es, sustituyendo en la igualdad: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2$

27 Si sen $\alpha = 0{,}3$, aproxima los valores del $\cos\alpha$ y tg α. Expresa los resultados con 4 cifras decimales.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha} = \sqrt{1-0{,}09} \approx 0{,}9539 \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}91}} \approx 0{,}3145$$

28 Aproxima con cuatro decimales los valores del seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 4.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow 4 = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \text{sen}\,\alpha = 4\cdot\cos\alpha$

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 4^2\cdot\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 17\cdot\cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \approx 0{,}2425$$

Y entonces: $\text{sen}\,\alpha = 4\cdot\dfrac{\sqrt{17}}{17} = \dfrac{4\sqrt{17}}{17} \approx 0{,}9701$

29 Calcula de forma aproximada todas las razones trigonométricas de los ángulos que cumplen que:

a) sen $\alpha = 0{,}3420$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}8930$ **c)** tg $\alpha = 5$

a) $\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha} = \sqrt{1-0{,}3420^2} \approx 0{,}9397 \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \approx \dfrac{0{,}3420}{0{,}9397} \approx 0{,}3639$

b) $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}8930^2} \approx 0{,}4501 \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \approx \dfrac{0{,}4501}{0{,}8930} \approx 0{,}5040$

c) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow 5 = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \text{sen}\,\alpha = 5\cdot\cos\alpha$

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 5^2\cdot\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 26\cdot\cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\text{sen}\,\alpha = 5\cdot\frac{\sqrt{26}}{26} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

30 Averigua para todos los apartados del ejercicio anterior cuál es el valor de α (tanto en radianes como en grados, minutos, segundos), utilizando tu calculadora. Comprueba después las soluciones, hallando sus razones de nuevo con la calculadora.

Los valores de los ángulos son por apartados:

a) $\text{arc sen}\,0{,}3420 \approx 19^\circ\,59'\,55{,}58'' \rightarrow 0{,}3490$ rad

b) $\text{arc cos}\,0{,}8930 \approx 26^\circ\,44'\,50{,}35'' \rightarrow 0{,}4668$ rad

c) $\text{arc tg}\,5 \approx 78^\circ\,41'\,24{,}24'' \rightarrow 1{,}3734$ rad

31 Justifica si es posible que $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4}$. En caso afirmativo, ¿cuánto valdría el seno?

Es posible, existe un valor para el seno, menor que uno, que cumple su relación con tangente y coseno.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\frac{4}{5}} \rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\frac{4}{5}\cdot 3}{4} = \frac{3}{5}$$

32 Si $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, determina los valores de sen α y tg α.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$$

33 Calcula las razones trigonométricas de un ángulo para el que $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{3}$.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow 3 \cdot \text{sen}\ \alpha = \cos\alpha$

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + 3^2 \cdot \text{sen}^2\ \alpha = 1 \rightarrow 10 \cdot \text{sen}^2\ \alpha = 1 \rightarrow \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos\alpha = 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

34 Copia y completa la tabla, expresando las soluciones de forma exacta.

sen α	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{21}}{5}$	$\frac{1}{4}$
cos α	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
tg α	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{21}}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{15}$

35 Busca las razones trigonométricas de un ángulo, α, cuyo seno valga el doble que el coseno.

Si $\text{sen}\ \alpha = 2 \cdot \cos\alpha$: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{2 \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} = 2$

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 2^2 \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 5 \cdot \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Y, por tanto: $\text{sen}\ \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Desafío

36 Demuestra con ayuda del teorema de Pitágoras que para cualquier ángulo, α, también se cumple:

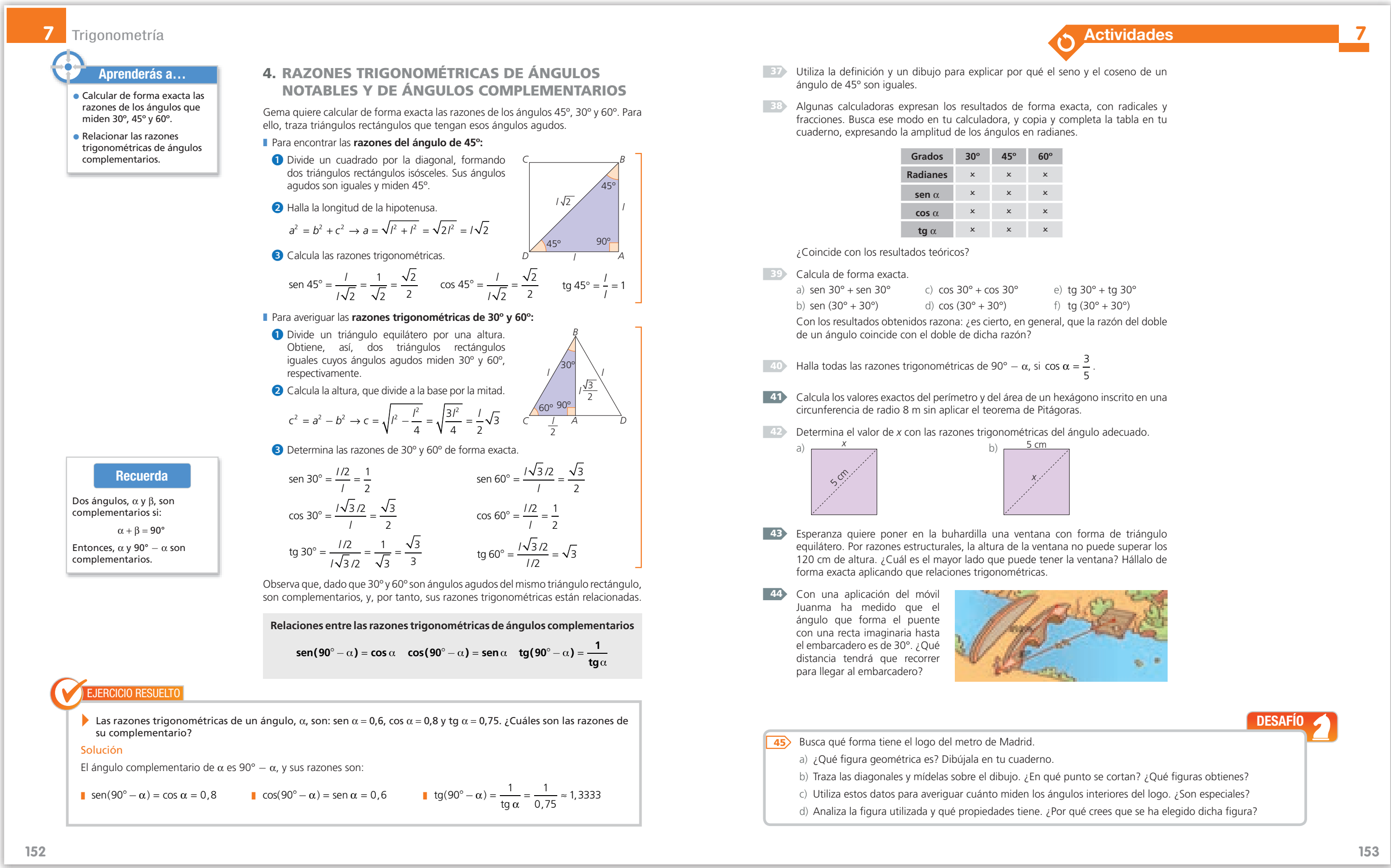
$$1 + \text{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Partiendo del primer miembro y aplicando las definición de tangente con los datos de la teoría:

$$1 + \text{tg}^2\ \alpha = 1 + \frac{c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right]^2 = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Se les puede pedir que lo demuestren, también, aplicando las relaciones fundamentales.

4. Razones trigonométricas de ángulos notables y de ángulos complementarios


7 Trigonometría

Aprenderás a…

- Calcular de forma exacta las razones de los ángulos que miden 30º, 45º y 60º.
- Relacionar las razones trigonométricas de ángulos complementarios.

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES Y DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Gema quiere calcular de forma exacta las razones de los ángulos 45º, 30º y 60º. Para ello, traza triángulos rectángulos que tengan esos ángulos agudos.

- Para encontrar las **razones del ángulo de 45º:**

1. Divide un cuadrado por la diagonal, formando dos triángulos rectángulos isósceles. Sus ángulos agudos son iguales y miden 45º.
2. Halla la longitud de la hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

3. Calcula las razones trigonométricas.

$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg } 45° = \frac{l}{l} = 1$$

- Para averiguar las **razones trigonométricas de 30º y 60º:**

1. Divide un triángulo equilátero por una altura. Obtiene, así, dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos agudos miden 30º y 60º, respectivamente.
2. Calcula la altura, que divide a la base por la mitad.

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

3. Determina las razones de 30º y 60º de forma exacta.

$$\text{sen } 30° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{l/2}{l\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60° = \frac{l\sqrt{3}/2}{l/2} = \sqrt{3}$$

Observa que, dado que 30º y 60º son ángulos agudos del mismo triángulo rectángulo, son complementarios, y, por tanto, sus razones trigonométricas están relacionadas.

Recuerda

Dos ángulos, α y β, son complementarios si:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Entonces, α y 90° − α son complementarios.

Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios

$$\textbf{sen}(90° - \alpha) = \textbf{cos}\,\alpha \qquad \textbf{cos}(90° - \alpha) = \textbf{sen}\,\alpha \qquad \textbf{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\textbf{tg}\,\alpha}$$

EJERCICIO RESUELTO

Las razones trigonométricas de un ángulo, α, son: sen α = 0,6, cos α = 0,8 y tg α = 0,75. ¿Cuáles son las razones de su complementario?

Solución

El ángulo complementario de α es 90° − α, y sus razones son:

- $\text{sen}(90° - \alpha) = \cos \alpha = 0{,}8$
- $\cos(90° - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}6$
- $\text{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{1}{0{,}75} \approx 1{,}3333$

152

Actividades 7

37 Utiliza la definición y un dibujo para explicar por qué el seno y el coseno de un ángulo de 45º son iguales.

38 Algunas calculadoras expresan los resultados de forma exacta, con radicales y fracciones. Busca ese modo en tu calculadora, y copia y completa la tabla en tu cuaderno, expresando la amplitud de los ángulos en radianes.

Grados	30º	45º	60º
Radianes	×	×	×
sen α	×	×	×
cos α	×	×	×
tg α	×	×	×

¿Coincide con los resultados teóricos?

39 Calcula de forma exacta.

a) sen 30° + sen 30°
b) sen (30° + 30°)
c) cos 30° + cos 30°
d) cos (30° + 30°)
e) tg 30° + tg 30°
f) tg (30° + 30°)

Con los resultados obtenidos razona: ¿es cierto, en general, que la razón del doble de un ángulo coincide con el doble de dicha razón?

40 Halla todas las razones trigonométricas de 90° − α, si $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

41 Calcula los valores exactos del perímetro y del área de un hexágono inscrito en una circunferencia de radio 8 m sin aplicar el teorema de Pitágoras.

42 Determina el valor de *x* con las razones trigonométricas del ángulo adecuado.

43 Esperanza quiere poner en la buhardilla una ventana con forma de triángulo equilátero. Por razones estructurales, la altura de la ventana no puede superar los 120 cm de altura. ¿Cuál es el mayor lado que puede tener la ventana? Hállalo de forma exacta aplicando que relaciones trigonométricas.

44 Con una aplicación del móvil Juanma ha medido que el ángulo que forma el puente con una recta imaginaria hasta el embarcadero es de 30°. ¿Qué distancia tendrá que recorrer para llegar al embarcadero?

DESAFÍO

45 Busca qué forma tiene el logo del metro de Madrid.

a) ¿Qué figura geométrica es? Dibújala en tu cuaderno.
b) Traza las diagonales y mídelas sobre el dibujo. ¿En qué punto se cortan? ¿Qué figuras obtienes?
c) Utiliza estos datos para averiguar cuánto miden los ángulos interiores del logo. ¿Son especiales?
d) Analiza la figura utilizada y qué propiedades tiene. ¿Por qué crees que se ha elegido dicha figura?

153

Sugerencias didácticas

En este epígrafe seguimos trabajando las razones trigonométricas desde su definición y las demostraciones. Es útil que aprendan las razones trigonométricas de los ángulos más representativos para agilizar el cálculo. Sin embargo, lo más interesante del epígrafe sería que comprendieran las demostraciones de estos valores y sean capaces de seguir el razonamiento y reproducirlo sin aprendérselo de memoria.

En los ejercicios se aplican estas razones partiendo de las figuras de las demostraciones.

El ejercicio 39 muestra la no linealidad de las razones trigonométricas aprovechando las razones de los ángulos notables. Es básico que lo "vean". Se puede enriquecer proponiéndoles alguna suma y resta utilizando la calculadora, 30° + 45°, 60° − 45°...

Soluciones de las actividades

37 Utiliza la definición y un dibujo para explicar por qué el seno y el coseno de un ángulo de 45° son iguales.

Para calcular las razones trigonométricas de 45° se utiliza un triángulo rectángulo isósceles, es decir, los catetos son iguales *b* = lado del cuadrado. Según la definición de seno y coseno:

$$\text{sen } 45° = \frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \cos 45°$$

38 Algunas calculadoras expresan los resultados de forma exacta, con radicales y fracciones. Busca ese modo en tu calculadora, y copia y completa la tabla en tu cuaderno, expresando la amplitud de los ángulos en radianes.

¿Coincide con los resultados teóricos?

Sí, coincide con los resultados teóricos. La calculadora da los resultados de forma exacta.

Grados	30º	45º	60º
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

39 Calcula de forma exacta.

a) sen 30° + sen 30° **c)** cos 30° + cos 30° **e)** tg 30° + tg 30°

b) sen (30° + 30°) **d)** cos (30° + 30°) **f)** tg (30° + 30°)

Con los resultados obtenidos razona: ¿es cierto, en general, que la razón del doble de un ángulo coincide con el doble de dicha razón?

a) $\text{sen } 30° + \text{sen } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b) $\text{sen }(30° + 30°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 30° + \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

d) $\cos(30° + 30°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

e) $\text{tg } 30° + \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg }(30° + 30°) = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

40 Halla todas las razones trigonométricas de 90° − α, si $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Hallamos primero las razones de α: $\text{sen }\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \to \text{tg }\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$

Entonces, las razones del complementario, 90° − α:

$\text{sen }(90° - \alpha) = \cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\cos(90° - \alpha) = \text{sen }\alpha = \frac{4}{5}$ $\text{tg }(90° - \alpha) = \text{cotg }\alpha = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$

41 Calcula los valores exactos del perímetro y del área de un hexágono inscrito en una circunferencia de radio 8 m sin aplicar el teorema de Pitágoras.

Para calcular el perímetro y el área necesitamos conocer el lado y la apotema del hexágono.

La longitud del lado coincide con la longitud del radio en un hexágono regular: $l = r = 8$ m

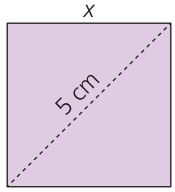
La apotema es uno de los catetos de los triángulos rectángulos en que la altura divide a los triángulos centrales. Tienen un ángulo de 30°, otro de 60° y la hipotenusa es el radio de la circunferencia, así:

$\text{sen } 60° = \frac{a}{r} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{8} \to a = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ m

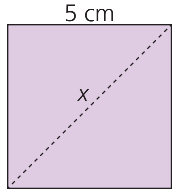
Y: $P = 6 \cdot l = 6 \cdot 8 = 48$ m $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}$ m²

42 Determina el valor de *x* con las razones trigonométricas del ángulo adecuado.

a)



b)



Ambas figuras son cuadrados, utilizamos las razones de 45° para buscar las longitudes pedidas.

a) $\text{sen } 45° = \frac{x}{5} \to \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{5} \to 5\sqrt{2} = 2x \to x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm **b)** $\text{sen } 45° = \frac{5}{x} \to \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{x} \to x\sqrt{2} = 10 \to x = 5\sqrt{2}$ cm

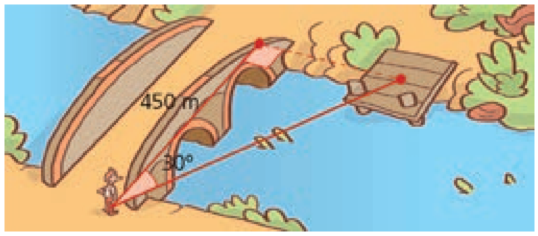
43 Esperanza quiere poner en la buhardilla una ventana con forma de triángulo equilátero. Por razones estructurales, la altura de la ventana no puede superar los 120 cm de altura. ¿Cuál es el mayor lado que puede tener la ventana? Hállalo de forma exacta aplicando las relaciones trigonométricas.

La altura de la ventana la divide en dos triángulos rectángulos con ángulos de 30° y 60° y de cateto mayor 120 cm e hipotenusa el lado del triángulo. Para calcular la longitud del lado:

$\text{sen } 60° = \frac{h}{l} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{120}{l} \to l = \frac{2 \cdot 120}{\sqrt{3}} = 80\sqrt{3}$ cm

La longitud máxima del lado es $80\sqrt{3}$ cm, exactamente.

44 Con una aplicación del móvil Juanma ha medido que el ángulo que forma el puente con una recta imaginaria hasta el embarcadero es de 30°. ¿Qué distancia tendrá que recorrer para llegar al embarcadero?



La distancia que tiene que recorrer para llegar al embarcadero es el cateto menor, c, del triángulo de la ilustración.

$$\text{tg } 30° = \frac{c}{450} \rightarrow c = 450 \cdot \text{tg } 30° = 450 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 150\sqrt{3} \approx 259{,}81 \text{ m}$$

En total, $450 + 259{,}81 = 709{,}81$ m.

Tendrá que recorrer unos 710 m para llegar al embarcadero.

Desafío

45 Busca qué forma tiene el logo del metro de Madrid.

a) ¿Qué figura geométrica es? Dibújala en tu cuaderno.

b) Traza las diagonales y mídelas sobre el dibujo. ¿En qué punto se cortan? ¿Qué figuras obtienes?

c) Utiliza estos datos para averiguar cuánto miden los ángulos interiores del logo. ¿Son especiales?

d) Analiza la figura utilizada y qué propiedades tiene. ¿Por qué crees que se ha elegido dicha figura?

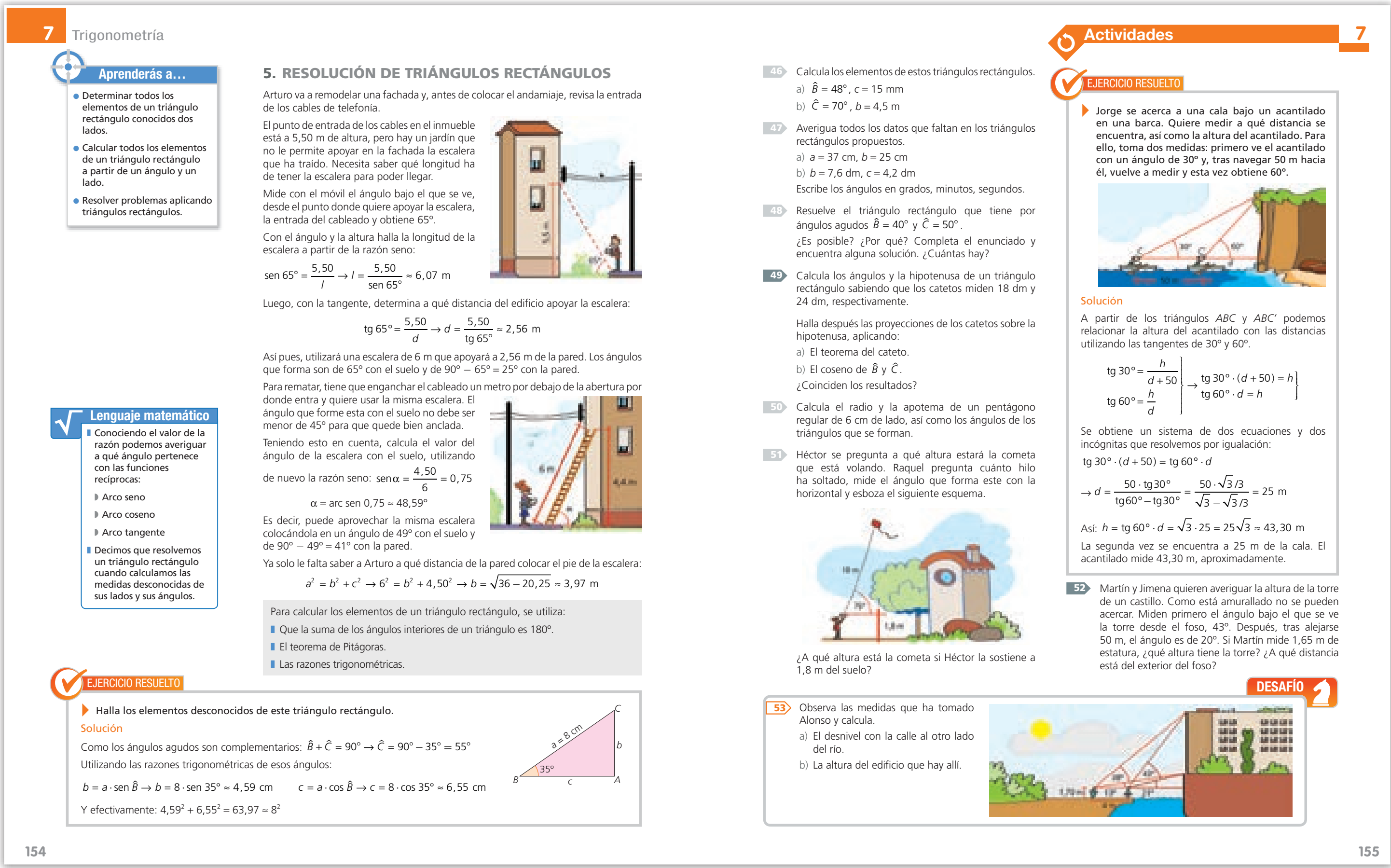
a) Es un rombo cuyos ángulos obtusos miden 120° y los agudos 60°.

b) Al trazar las diagonales estas se cortan perpendicularmente por el punto medio y obtenemos cuatro triángulos rectángulos.

c) Los ángulos agudos son de 30° y 60°.

d) La figura es simétrica y si la dividimos por la diagonal menor observamos que está formada por dos triángulos equiláteros, lo que la hace estéticamente más armoniosa por su regularidad.

5. Resolución de triángulos rectángulos



7 Trigonometría

Aprenderás a…

- Determinar todos los elementos de un triángulo rectángulo conocidos dos lados.
- Calcular todos los elementos de un triángulo rectángulo a partir de un ángulo y un lado.
- Resolver problemas aplicando triángulos rectángulos.

5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Arturo va a remodelar una fachada y, antes de colocar el andamiaje, revisa la entrada de los cables de telefonía.

El punto de entrada de los cables en el inmueble está a 5,50 m de altura, pero hay un jardín que no le permite apoyar en la fachada la escalera que ha traído. Necesita saber qué longitud ha de tener la escalera para poder llegar.

Mide con el móvil el ángulo bajo el que se ve, desde el punto donde quiere apoyar la escalera, la entrada del cableado y obtiene 65°.

Con el ángulo y la altura halla la longitud de la escalera a partir de la razón seno:

$$\text{sen } 65° = \frac{5{,}50}{l} \rightarrow l = \frac{5{,}50}{\text{sen } 65°} \approx 6{,}07 \text{ m}$$

Luego, con la tangente, determina a qué distancia del edificio apoyar la escalera:

$$\text{tg } 65° = \frac{5{,}50}{d} \rightarrow d = \frac{5{,}50}{\text{tg } 65°} \approx 2{,}56 \text{ m}$$

Así pues, utilizará una escalera de 6 m que apoyará a 2,56 m de la pared. Los ángulos que forma son de 65° con el suelo y de 90° − 65° = 25° con la pared.

Para rematar, tiene que enganchar el cableado un metro por debajo de la abertura por donde entra y quiere usar la misma escalera. El ángulo que forme esta con el suelo no debe ser menor de 45° para que quede bien anclada.

Teniendo esto en cuenta, calcula el valor del ángulo de la escalera con el suelo, utilizando de nuevo la razón seno: $\text{sen}\,\alpha = \frac{4{,}50}{6} = 0{,}75$

$$\alpha = \text{arc sen } 0{,}75 \approx 48{,}59°$$

Es decir, puede aprovechar la misma escalera colocándola en un ángulo de 49° con el suelo y de 90° − 49° = 41° con la pared.

Ya solo le falta saber a Arturo a qué distancia de la pared colocar el pie de la escalera:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 6^2 = b^2 + 4{,}50^2 \rightarrow b = \sqrt{36 - 20{,}25} \approx 3{,}97 \text{ m}$$

Para calcular los elementos de un triángulo rectángulo, se utiliza:
- Que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
- El teorema de Pitágoras.
- Las razones trigonométricas.

Lenguaje matemático

- Conociendo el valor de la razón podemos averiguar a qué ángulo pertenece con las funciones recíprocas:
  - Arco seno
  - Arco coseno
  - Arco tangente
- Decimos que resolvemos un triángulo rectángulo cuando calculamos las medidas desconocidas de sus lados y sus ángulos.

EJERCICIO RESUELTO

Halla los elementos desconocidos de este triángulo rectángulo.

Solución

Como los ángulos agudos son complementarios: $\hat{B} + \hat{C} = 90° \rightarrow \hat{C} = 90° - 35° = 55°$

Utilizando las razones trigonométricas de esos ángulos:

$b = a \cdot \text{sen } \hat{B} \rightarrow b = 8 \cdot \text{sen } 35° \approx 4{,}59$ cm $c = a \cdot \cos \hat{B} \rightarrow c = 8 \cdot \cos 35° \approx 6{,}55$ cm

Y efectivamente: $4{,}59^2 + 6{,}55^2 = 63{,}97 \approx 8^2$

154

Actividades 7

46 Calcula los elementos de estos triángulos rectángulos.
a) $\hat{B} = 48°$, $c = 15$ mm
b) $\hat{C} = 70°$, $b = 4{,}5$ m

47 Averigua todos los datos que faltan en los triángulos rectángulos propuestos.
a) $a = 37$ cm, $b = 25$ cm
b) $b = 7{,}6$ dm, $c = 4{,}2$ dm
Escribe los ángulos en grados, minutos, segundos.

48 Resuelve el triángulo rectángulo que tiene por ángulos agudos $\hat{B} = 40°$ y $\hat{C} = 50°$.
¿Es posible? ¿Por qué? Completa el enunciado y encuentra alguna solución. ¿Cuántas hay?

49 Calcula los ángulos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 18 dm y 24 dm, respectivamente.
Halla después las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, aplicando:
a) El teorema del cateto.
b) El coseno de $\hat{B}$ y $\hat{C}$.
¿Coinciden los resultados?

50 Calcula el radio y la apotema de un pentágono regular de 6 cm de lado, así como los ángulos de los triángulos que se forman.

51 Héctor se pregunta a qué altura estará la cometa que está volando. Raquel pregunta cuánto hilo ha soltado, mide el ángulo que forma este con la horizontal y esboza el siguiente esquema.

¿A qué altura está la cometa si Héctor la sostiene a 1,8 m del suelo?

EJERCICIO RESUELTO

Jorge se acerca a una cala bajo un acantilado en una barca. Quiere medir a qué distancia se encuentra, así como la altura del acantilado. Para ello, toma dos medidas: primero ve el acantilado con un ángulo de 30° y, tras navegar 50 m hacia él, vuelve a medir y esta vez obtiene 60°.

Solución

A partir de los triángulos *ABC* y *ABC′* podemos relacionar la altura del acantilado con las distancias utilizando las tangentes de 30° y 60°.

$$\left.\begin{aligned}\text{tg } 30° &= \frac{h}{d+50}\\ \text{tg } 60° &= \frac{h}{d}\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}\text{tg } 30° \cdot (d+50) &= h\\ \text{tg } 60° \cdot d &= h\end{aligned}\right\}$$

Se obtiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que resolvemos por igualación:

$$\text{tg } 30° \cdot (d+50) = \text{tg } 60° \cdot d$$

$$\rightarrow d = \frac{50 \cdot \text{tg } 30°}{\text{tg } 60° - \text{tg } 30°} = \frac{50 \cdot \sqrt{3}/3}{\sqrt{3} - \sqrt{3}/3} = 25 \text{ m}$$

Así: $h = \text{tg } 60° \cdot d = \sqrt{3} \cdot 25 = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30$ m

La segunda vez se encuentra a 25 m de la cala. El acantilado mide 43,30 m, aproximadamente.

52 Martín y Jimena quieren averiguar la altura de la torre de un castillo. Como está amurallado no se pueden acercar. Miden primero el ángulo bajo el que se ve la torre desde el foso, 43°. Después, tras alejarse 50 m, el ángulo es de 20°. Si Martín mide 1,65 m de estatura, ¿qué altura tiene la torre? ¿A qué distancia está del exterior del foso?

DESAFÍO

53 Observa las medidas que ha tomado Alonso y calcula.
a) El desnivel con la calle al otro lado del río.
b) La altura del edificio que hay allí.

155

Sugerencias didácticas

En este epígrafe aplicamos las razones trigonométricas recién aprendidas para determinar todos los elementos de un triángulo rectángulo y resolver problemas.

En cada problema podemos invitar a los alumnos a trazar el triángulo adecuado y pedirles que relacionen los datos que conocen y piden con la razón trigonométrica adecuada. Insistir en que utilicen una notación correcta y ordenada.

Soluciones de las actividades

46 Calcula los elementos de estos triángulos rectángulos.

a) $\hat{B} = 48°$, $c = 15$ mm **b)** $\hat{C} = 70°$, $b = 4{,}5$ m

a) $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 48°$, $\hat{C} = 90° - 48° = 42°$

$$\cos 48° = \frac{c}{a} \rightarrow \cos 48° = \frac{15}{a} \rightarrow a = \frac{15}{\cos 48°} \approx 22{,}42 \text{ mm}$$

$$\text{tg } 48° = \frac{b}{c} \rightarrow \text{tg } 48° = \frac{b}{15} \rightarrow b = 15 \cdot \text{tg } 48° \approx 16{,}66 \text{ mm}$$

b) $\hat{A} = 90°$, $\hat{C} = 70°$, $\hat{B} = 90° - 70° = 20°$

$$\cos 70° = \frac{b}{a} \rightarrow \cos 70° = \frac{4{,}5}{a} \rightarrow a = \frac{4{,}5}{\cos 70°} \approx 13{,}16 \text{ m}$$

$$\text{tg } 70° = \frac{c}{b} \rightarrow \text{tg } 70° = \frac{c}{4{,}5} \rightarrow c = 4{,}5 \cdot \text{tg } 70° \approx 12{,}36 \text{ m}$$

47 Averigua todos los datos que faltan en los triángulos rectángulos propuestos.

a) $a = 37$ cm, $b = 25$ cm

b) $b = 7{,}6$ dm, $c = 4{,}2$ dm

Escribe los ángulos en grados, minutos, segundos.

a) Hallamos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ a través de sus razones trigonométricas:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow \hat{B} = \text{arc sen}\,\frac{25}{37} = 42°\ 30'\ 23{,}91'' \qquad \cos\hat{C} = \frac{b}{a} \rightarrow \hat{C} = \text{arc cos}\,\frac{25}{37} = 47°\ 29'\ 36{,}09''$$

Y c aplicando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{37^2 - 25^2} = \sqrt{744} \approx 27{,}28$ cm

b) Hallamos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ a través de sus tangentes:

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \hat{B} = \text{arc tg}\,\frac{7{,}6}{4{,}2} = 61°\ 4'\ 24{,}87'' \qquad \text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b} \rightarrow \hat{C} = \text{arc tg}\,\frac{4{,}2}{7{,}6} = 28°\ 55'\ 35{,}13''$$

Y a aplicando el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{7{,}6^2 + 4{,}2^2} = \sqrt{75{,}4} \approx 8{,}68$ dm

48 Resuelve el triángulo rectángulo que tiene por ángulos agudos $\hat{B} = 40°$ y $\hat{C} = 50°$.
¿Es posible? ¿Por qué? Completa el enunciado y encuentra alguna solución. ¿Cuántas hay?

No es posible porque no conocemos la longitud de ninguno de sus tres lados. Hay infinitos triángulos, todos semejantes, de distintos tamaños y con los mismos ángulos.

La segunda pregunta tiene respuesta abierta, se puede fijar cualquier lado. Por ejemplo, si la hipotenusa es $a = 10$ m:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow b = a \cdot \text{sen}\,\hat{B} = 10 \cdot \text{sen}\,40° \approx 6{,}43\ \text{m} \qquad \text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \text{sen}\,\hat{C} = 10 \cdot \text{sen}\,50° \approx 7{,}66\ \text{m}$$

49 Calcula los ángulos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 18 dm y 24 dm, respectivamente. Halla después las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, aplicando:

a) El teorema del cateto.

b) El coseno de $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

¿Coinciden los resultados?

Aplicando el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{900} = 30$ dm

Y con las razones trigonométricas:

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \hat{B} = \text{arc tg}\,\frac{18}{24} = 36°52'\ 11{,}63'' \qquad \text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b} \rightarrow \hat{C} = \text{arc tg}\,\frac{24}{18} = 53°\ 7'\ 48{,}37''$$

Hallamos las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

a) Por el teorema del cateto: $m = \frac{c^2}{a} = \frac{24^2}{30} = 19{,}2$ dm $\qquad n = \frac{b^2}{a} = \frac{18^2}{30} = 10{,}8$ dm

b) Aplicando la definición del coseno:

$$\cos\hat{B} = \frac{m}{c} \rightarrow m = c \cdot \cos\hat{B} = 24 \cdot \cos\left(36°\ 52'\ 11{,}63''\right) = 19{,}2\ \text{dm}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{n}{b} \rightarrow n = b \cdot \cos\hat{C} = 18 \cdot \cos\left(53°\ 7'\ 48{,}37''\right) = 10{,}8\ \text{dm}$$

50 Calcula el radio y la apotema de un pentágono regular de 6 cm de lado, así como los ángulos de los triángulos que se forman.

El ángulo central de un pentágono regular mide: $\frac{360°}{5} = 72°$

Cada uno de los triángulos que se forman es isósceles y los ángulos iguales miden: $\frac{180° - 72°}{2} = 54°$

La altura de ese triángulo lo divide en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el radio y los catetos, la altura y la mitad del lado. Para este triángulo: $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 54°$, $\hat{C} = 90° - 54° = 36°$ y $c = \frac{6}{2} = 3$ cm

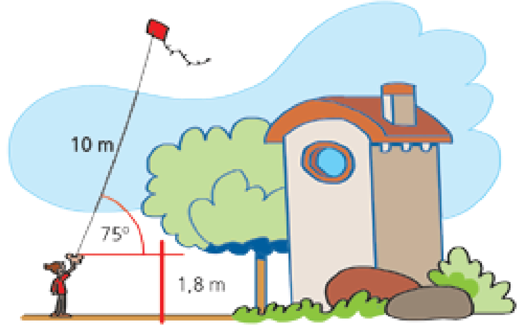
Calculamos el radio y la altura utilizando las razones de 36°:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow \text{sen}\,36° = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{\text{sen}\,36°} \approx 5{,}10\ \text{cm}\ \text{es la medida del radio}$$

$$\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b} \rightarrow \text{tg}\,36° = \frac{3}{b} \rightarrow b = \frac{3}{\text{tg}\,36°} \approx 4{,}13\ \text{cm}\ \text{es la medida de la altura}$$

51 Héctor se pregunta a qué altura estará la cometa que está volando. Raquel pregunta cuánto hilo ha soltado, mide el ángulo que forma este con la horizontal y esboza el siguiente esquema.

¿A qué altura está la cometa si Héctor la sostiene a 1,8 m del suelo?



La altura de la cometa desde la mano de Héctor junto con la longitud del hilo nos dan el seno de 75°.

$$\text{sen } 75° = \frac{h}{10} \rightarrow h = 10 \cdot \text{sen } 75° \approx 9,66 \text{ m}$$

Para calcular la altura total de la cometa debemos añadir la altura de Héctor: $9,66 + 1,80 = 11,46$ m

La cometa está a una altura de unos 11,46 m.

52 Martín y Jimena quieren averiguar la altura de la torre de un castillo. Como está amurallado no se pueden acercar. Miden primero el ángulo bajo el que se ve la torre desde el foso, 43°. Después, tras alejarse 50 m, el ángulo es de 20°. Si Martín mide 1,65 m de estatura, ¿qué altura tiene la torre? ¿A qué distancia está del exterior del foso?

A partir de los triángulos que forman la torre del castillo con el suelo y las distintas posiciones en las que se encuentran Martín y Jimena podemos relacionar la altura de la torre con las distancias utilizando las tangentes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 20° = \dfrac{h}{d+50} \\ \text{tg } 43° = \dfrac{h}{d} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{tg } 20° \cdot (d+50) = h \\ \text{tg } 43° \cdot d = h \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Igualación}} \text{tg } 20° \cdot (d+50) = \text{tg } 43° \cdot d$$

$$d = \frac{50 \cdot \text{tg } 20°}{\text{tg } 43° - \text{tg } 20°} \approx 32 \text{ m}$$

Sustituyendo: $h = d \cdot \text{tg } 43° = 32 \cdot \text{tg } 43° \approx 29,84$ m

Sumándole la altura del observador, Martín, la torre mide: $29,84 + 1,65 = 31,49$ m

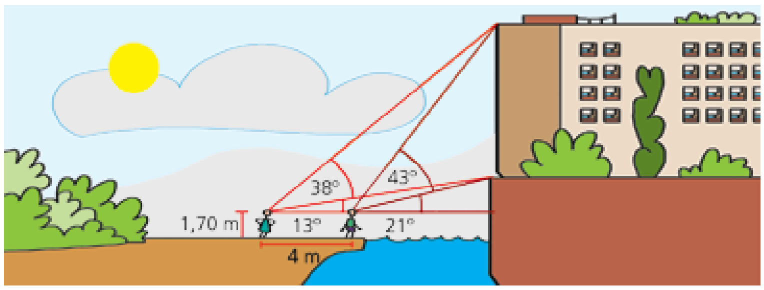
La torre tiene una altura de unos 31,5 m y está a una distancia del exterior del foso de unos 32 m.

Desafío

53 Observa las medidas que ha tomado Alonso y calcula.

a) El desnivel con la calle al otro lado del río.

b) La altura del edificio que hay allí.



Determinamos primero la altura del edificio más el trozo de muro:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}(13°+38°) = \dfrac{h+h'}{d+4} \\ \text{tg}(21°+43°) = \dfrac{h+h'}{d} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{tg } 51° \cdot (d+4) = h+h' \\ \text{tg } 64° \cdot d = h+h' \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{Igualación}} \text{tg } 51° \cdot (d+4) = \text{tg } 64° \cdot d$$

$$d = \frac{4 \cdot \text{tg } 51°}{\text{tg } 64° - \text{tg } 51°} \approx 6,06 \text{ m}$$

Así: $h + h' = d \cdot \text{tg } 64° = 6,06 \cdot \text{tg } 64° \approx 12,42$ m

Luego la altura del trozo de muro exclusivamente es: $\text{tg } 21° = \dfrac{h'}{d} \rightarrow h' = d \cdot \text{tg } 21° \approx 6,06 \cdot \text{tg } 21° \approx 2,33$ m

Entonces, la altura del edificio será la diferencia de las dos: $h = 12,42 - 2,33 = 10,09$ m

Y la altura del desnivel es la suma del muro y la altura del observador, Alonso: $2,33 + 1,70 = 4,03$ m

El edificio mide 10 m y el desnivel con la calle de 4 m.

6. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Aprenderás a…

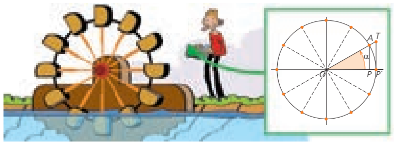
- Extender el concepto de razón trigonométrica a un ángulo cualquiera.
- Reconocer qué amplitud puede tener un ángulo y en qué cuadrante se encuentra, según el signo de sus razones trigonométricas.

6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Teo está observando una noria de agua y se ha fijado en que sus cestas giran al contrario de las agujas del reloj. La posición que ocupa cada cesta depende del ángulo que ha girado hasta llegar ahí.

Hace un esbozo y dibuja en él unos ejes con origen en el centro de la noria. Las coordenadas de la cesta *A* dependen del ángulo de giro α (ángulo que forma el brazo con la horizontal) y, por tanto, de sus razones trigonométricas.

Si considera que el radio de la circunferencia es una unidad, la hipotenusa del triángulo *OPA* valdría 1 y las coordenadas, (*x*, *y*), de la cesta coincidirían con el coseno y el seno, respectivamente: *A* (cos α, sen α)



Traza una paralela al eje *Y* por el punto (1, 0) para representar la tangente en esta construcción. Prolonga el radio *OA* hasta cortar a la tangente y obtiene otro triángulo rectángulo. En este caso es el cateto adyacente el que mide 1 y el cateto opuesto:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{P'T}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{P'T}}{1} = \overline{P'T}$$

Cuando la cesta, en su giro, pasa de los 90° y se sitúa en el segundo cuadrante, su coordenada *x* es negativa. Si Teo extiende la interpretación geométrica anterior, el coseno de ese ángulo es negativo.

Ya no asocia las razones trigonométricas con un triángulo rectángulo, sino con las coordenadas de los puntos de la **circunferencia goniométrica** y las razones no solo toman valores entre 0 y 1.

La cesta prosigue su giro, y Teo ve cómo ahora ambas razones son negativas; continúa, y *x* vuelve a ser positiva… De este modo, según el ángulo de giro, el punto *A* se sitúa en un cuadrante u otro, y sus coordenadas (razones trigonométricas) cambian su valor y su signo.

Lenguaje matemático

- El sentido positivo de giro es el contrario al movimiento de las agujas de un reloj.
- Un ángulo se mide en ese sentido.
- Un ángulo medido en sentido contrario es negativo.

Presta atención

$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

mac4e27

La **circunferencia goniométrica** es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas. Las coordenadas de los puntos de la circunferencia se identifican con el coseno y el seno, respectivamente, del ángulo que forman el eje positivo de abscisas y el radio que une el centro con ese punto medido en sentido contrario a las agujas del reloj.

Actividades 7

54 Expresa en radianes la amplitud de estos ángulos e indica a qué cuadrante pertenecen.
a) 167° 45′ 45″ c) 13° 27′ 9″
b) 300° 36′ 12″ d) 215° 39′ 23″
Represéntalos en la circunferencia aproximadamente.

55 Indica qué signo tienen las razones trigonométricas de los ángulos del ejercicio anterior. Determínalas utilizando la calculadora en grados y en radianes.

EJERCICIO RESUELTO

Expresa los siguientes ángulos en su ángulo equivalente entre 0° y 360°. Indica su cuadrante y determina sus razones trigonométricas.

a) 1 550° b) −160°

Solución

a) Un ángulo de 1 550° equivale a cierto número de vueltas completas a la circunferencia más un ángulo comprendido entre 0° y 360°.

$$\begin{array}{r|l} 1\,550° & 360° \\ \hline 110° & 4 \end{array} \rightarrow 1\,550° = 4 \cdot 360° + 110°$$

Es decir, 1 550° está en el segundo cuadrante y sus razones trigonométricas son las mismas que las de 110°.

$\text{sen}\,1\,550° = \text{sen}\,110° \approx 0{,}9397$

$\cos 1\,550° = \cos 110° \approx -0{,}3420$

$\text{tg}\,1\,550° = \text{tg}\,110° \approx -2{,}7475$

b) Un ángulo de −160° es equivalente a:

$360° - 160° = 200° \rightarrow -160° = (-1) \cdot 360° + 200°$

Es decir, −160° es un ángulo del tercer cuadrante y sus razones trigonométricas son las de 200°.

$\text{sen}\,(-160°) = \text{sen}\,200° \approx -0{,}3420$

$\cos(-160°) = \cos 200° \approx -0{,}9397$

$\text{tg}\,(-160°) = \text{tg}\,200° \approx 0{,}3640$

56 Expresa estos ángulos en radianes entre 0 y 2π. Indica el número de vueltas completas y a qué cuadrante pertenecen.
a) 750° b) −330° c) 3 060° d) −360°
¿Qué signo tendrán sus razones trigonométricas? Hállalas con la calculadora.

57 Con ayuda de la circunferencia y un transportador, calcula todos los ángulos, entre 0° y 360°, tales que $\cos\alpha = -1/2$. ¿En qué cuadrantes están?

58 Indica en qué cuadrante se situaría un ángulo si:
a) $\begin{cases} \text{tg}\,\alpha < 0 \\ \text{sen}\,\alpha > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos\alpha < 0 \\ \text{sen}\,\alpha < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos\alpha < 0 \\ \text{tg}\,\alpha < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \text{tg}\,\alpha > 0 \\ \cos\alpha < 0 \end{cases}$

59 Considera una circunferencia goniométrica, y copia y completa esta tabla sin usar la calculadora.

(°)	0°	90°	180°	270°	360°
rad	×	×	×	×	×
sen α	×	×	×	×	×
cos α	×	×	×	×	×
tg α	×	×	×	×	×

60 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo del segundo cuadrante para el que $\text{sen}\,\alpha = \frac{21}{29}$.

61 El coseno de un ángulo del cuarto cuadrante vale $\sqrt{5}/3$. ¿Cuánto miden el seno y la tangente?

62 La tangente de un ángulo vale un tercio, y su coseno es negativo.
- ¿En qué cuadrante se encuentra?
- Determina todas sus razones trigonométricas.

63 Decide si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) Si $\text{tg}\,\alpha > 0$, α pertenece al primer cuadrante.
b) Existe un ángulo, α, perteneciente al tercer cuadrante para el que su seno es tres cuartos.
c) La tangente de un ángulo del primer cuadrante está entre 0 y 1.
d) Hay algún ángulo en el segundo cuadrante para el que $\cos\alpha = -\frac{3}{2}$.

64 Traza en tu cuaderno una circunferencia goniométrica, tomando como radio 1 dm. Busca todos los puntos en ella que verifican que:

$$|\text{sen}\,\alpha| = |\cos\alpha|$$

a) ¿Con qué ángulo se corresponde cada uno?
b) Determina todas las razones trigonométricas de cada uno de ellos.
c) ¿Existe alguna relación entre las razones de unos y otros?

DESAFÍO

65 Traza una circunferencia goniométrica y dibuja en ella un ángulo en cada cuadrante. Marca las razones trigonométricas de cada uno. Razonando en cada caso sobre el triángulo que corresponda, justifica si se cumple $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y por qué.

Sugerencias didácticas

Extender el concepto de razón trigonométrica fuera de un triángulo rectángulo es difícil de plantear al alumno. Para que sea más fácil de comprender la única estrategia es mostrar siempre los ángulos en la circunferencia goniométrica. Primero definimos qué es la circunferencia goniométrica, después identificamos un ángulo, agudo, con el punto que determina sobre la circunferencia goniométrica y sus razones con las coordenadas de ese punto. Asociar la tangente con la medida del segmento *P′T*. (Es muy útil haber hecho antes en clase las actividades 17 y 18). Por último, ayudándonos de GeoGebra, vemos cómo varían los ángulos y con ellos los triángulos rectángulos, su posición y el valor de las razones. Resaltar que tanto el seno como el coseno varían solo entre −1 y 1, mientras la tangente toma cualquier valor real.

Para ayudar a ver que las relaciones entre las razones trigonométricas se cumplen para cualquier ángulo es interesante comprobarlo con el Desafío.

GeoGebra. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En el recurso se muestra la circunferencia goniométrica y la representación de las razones trigonométricas de un ángulo. Se puede mover el punto de la circunferencia determinado por la intersección de uno de los lados del ángulo y observar los signos de las razones según las coordenadas correspondan a uno de los cuatro cuadrantes. Puede utilizarse en clase como apoyo a la explicación de esta página o como recurso para que los alumnos repasen los signos de las razones trigonométricas según la amplitud del ángulo más tarde.

Soluciones de las actividades

54 Expresa en radianes la amplitud de estos ángulos e indica a qué cuadrante pertenecen.

a) 167° 45′ 45″ b) 300° 36′ 12″ c) 13° 27′ 9″ d) 215° 39′ 23″

Represéntalos en la circunferencia aproximadamente.

a) 167° 45′ 45″ ≈ 2,9280 rad → Segundo cuadrante

b) 300° 36′ 12″ ≈ 5,2465 rad → Cuarto cuadrante

c) 13° 27′ 9″ ≈ 0,2348 rad → Primer cuadrante

d) 215° 39′ 23″ ≈ 3,7639 rad → Tercer cuadrante

Comprobar que representan el ángulo en el cuadrante correspondiente y más o menos en su posición.

55 Indica qué signo tienen las razones trigonométricas de los ángulos del ejercicio anterior. Determínalas utilizando la calculadora en grados y en radianes.

α	sen α	cos α	tg α
167° 45′ 45″	0,2120	−0,9773	−0,2169
300° 36′ 12″	−0,8607	0,5091	−1,6907
13° 27′ 9″	0,2326	0,9726	0,2392
215° 39′ 23″	−0,5829	−0,8125	0,7174

56 Expresa estos ángulos en radianes entre 0 y 2π. Indica el número de vueltas completas y a qué cuadrante pertenecen.

a) 750° b) −330° c) 3 060° d) −360°

¿Qué signo tendrán sus razones trigonométricas? Hállalas con la calculadora.

a) $750° = 2 \cdot 360° + 30° \rightarrow$ Primer cuadrante

$\text{sen } 750° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 750° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg } 750° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $-330° \rightarrow 360° - 330° = 30° \rightarrow$ Primer cuadrante

$\text{sen}(-330°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\cos(-330°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg}(-330°) = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $3060° = 8 \cdot 360° + 180° \rightarrow$ Entre el segundo y el tercer cuadrante

$\text{sen } 3060° = \text{sen } 180° = 0$ $\cos 3060° = \cos 180° = -1$ $\text{tg } 3060° = \text{tg } 180° = 0$

d) $-360° \rightarrow 360° - 360° = 0° \rightarrow$ Entre el cuarto y el primer cuadrante

$\text{sen}(-360°) = \text{sen } 0° = 0$ $\cos(-360°) = \cos 0° = 1$ $\text{tg}(-360°) = \text{tg } 0° = 0$

57 Con ayuda de la circunferencia y un transportador, calcula todos los ángulos, entre 0° y 360°, tales que $\cos \alpha = -1/2$. ¿En qué cuadrantes están?

Marcamos $-\frac{1}{2}$ sobre el eje X y obtenemos dos ángulos:

- En el segundo cuadrante $\rightarrow 180° - 60° = 120°$
- En el tercer cuadrante $\rightarrow 180° + 60° = 240°$

58 Indica en qué cuadrante se situaría un ángulo si:

a) $\begin{cases} \text{tg } \alpha < 0 \\ \text{sen } \alpha > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \text{sen } \alpha < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \text{tg } \alpha < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \text{tg } \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$

a) Segundo cuadrante b) Tercer cuadrante c) Segundo cuadrante d) Tercer cuadrante

59 Considera una circunferencia goniométrica, y copia y completa esta tabla sin usar la calculadora.

(°)	0°	90°	180°	270°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen α	0	1	0	−1	0
cos α	1	0	−1	0	1
tg α	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

60 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo del segundo cuadrante para el que $\text{sen } \alpha = \frac{21}{29}$.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{21}{29}\right)^2} = -\frac{20}{29} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{21/29}{-20/29} = -\frac{21}{20}$$

61 El coseno de un ángulo del cuarto cuadrante vale $\sqrt{5}/3$. ¿Cuánto miden el seno y la tangente?

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\text{sen}\,\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\,^2\!/_3}{\sqrt{5}\,/_3} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

62 La tangente de un ángulo vale un tercio, y su coseno es negativo.

- ¿En qué cuadrante se encuentra?
- Determina todas sus razones trigonométricas.

Se encuentra en el tercer cuadrante pues su coseno es negativo y la tangente positiva.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow 3\cdot\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \rightarrow \text{sen}^2\alpha + 3^2\cdot\text{sen}^2\alpha = 1 \rightarrow 10\cdot\text{sen}^2\alpha = 1 \rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \cos\alpha = 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

63 Decide si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si tg $\alpha > 0$, α pertenece al primer cuadrante.

b) Existe un ángulo, α, perteneciente al tercer cuadrante para el que su seno es tres cuartos.

c) La tangente de un ángulo del primer cuadrante está entre 0 y 1.

d) Hay algún ángulo en el segundo cuadrante para el que $\cos\alpha = -\frac{3}{2}$.

a) Falso. Podría pertenecer también al tercer cuadrante.

b) Falso. Los ángulos del tercer cuadrante tienen el seno negativo.

c) Falso. Es positiva pero puede tomar cualquier valor. También mayor que 1.

d) Falso. No puede ser menor que -1.

64 Traza en tu cuaderno una circunferencia goniométrica, tomando como radio 1 dm. Busca todos los puntos en ella que verifican que:

$$|\text{sen}\,\alpha| = |\cos\alpha|$$

a) ¿Con qué ángulo se corresponde cada uno?

b) Determina todas las razones trigonométricas de cada uno de ellos.

c) ¿Existe alguna relación entre las razones de unos y otros?

a) Son los ángulos: 45°, 135°, 225°, 315°. Comprobar que los alumnos tienen dibujados los ángulos en la mitad de cada cuadrante.

b)

(°)	45°	135°	225°	315°
rad	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
sen α	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tg α	1	-1	1	-1

c) Todos están relacionados con 45°.

Desafío

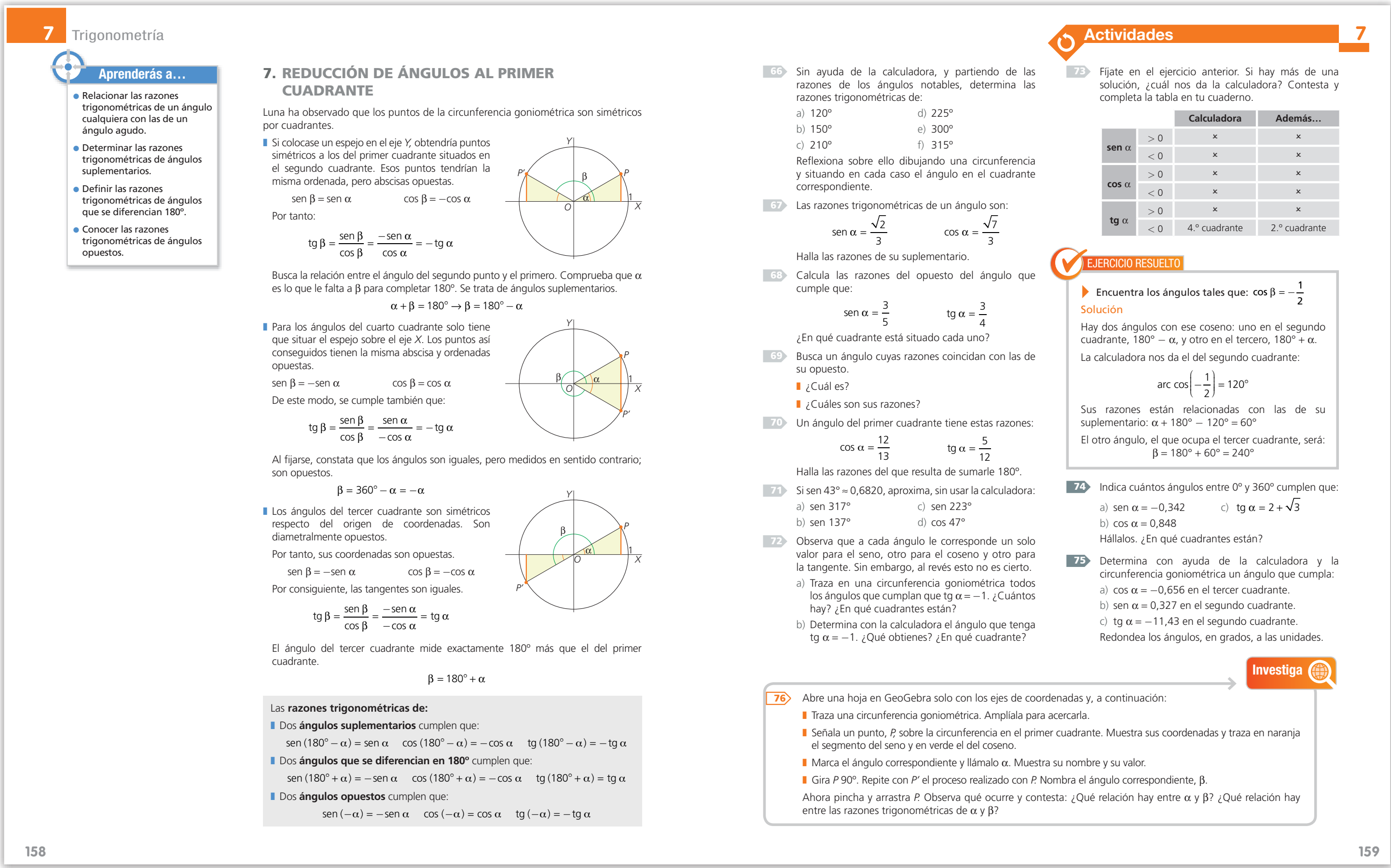
65 Traza una circunferencia goniométrica y dibuja en ella un ángulo en cada cuadrante. Marca las razones trigonométricas de cada uno. Razonando en cada caso sobre el triángulo que corresponda, justifica si se cumple $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y por qué.

En cada caso, no importa el cuadrante, se forma un triángulo rectángulo.

Considerando las longitudes de sus catetos, seno y coseno, en valor absoluto (el signo solo indica la posición) y la hipotenusa, radio de la circunferencia, han de cumplir el teorema de Pitágoras. Y por tanto:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2 = 1$$

7. Reducción de ángulos al primer cuadrante



7 Trigonometría

Aprenderás a…

- Relacionar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera con las de un ángulo agudo.
- Determinar las razones trigonométricas de ángulos suplementarios.
- Definir las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian 180°.
- Conocer las razones trigonométricas de ángulos opuestos.

7. REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE

Luna ha observado que los puntos de la circunferencia goniométrica son simétricos por cuadrantes.

- Si colocase un espejo en el eje *Y*, obtendría puntos simétricos a los del primer cuadrante situados en el segundo cuadrante. Esos puntos tendrían la misma ordenada, pero abscisas opuestas.

  $\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$

  Por tanto:

  $$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$$

  Busca la relación entre el ángulo del segundo punto y el primero. Comprueba que α es lo que le falta a β para completar 180°. Se trata de ángulos suplementarios.

  $$\alpha + \beta = 180° \rightarrow \beta = 180° - \alpha$$

- Para los ángulos del cuarto cuadrante solo tiene que situar el espejo sobre el eje *X*. Los puntos así conseguidos tienen la misma abscisa y ordenadas opuestas.

  $\text{sen}\,\beta = -\text{sen}\,\alpha \qquad \cos\beta = \cos\alpha$

  De este modo, se cumple también que:

  $$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$$

  Al fijarse, constata que los ángulos son iguales, pero medidos en sentido contrario; son opuestos.

  $$\beta = 360° - \alpha = -\alpha$$

- Los ángulos del tercer cuadrante son simétricos respecto del origen de coordenadas. Son diametralmente opuestos.

  Por tanto, sus coordenadas son opuestas.

  $\text{sen}\,\beta = -\text{sen}\,\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$

  Por consiguiente, las tangentes son iguales.

  $$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$$

  El ángulo del tercer cuadrante mide exactamente 180° más que el del primer cuadrante.

  $$\beta = 180° + \alpha$$

Las **razones trigonométricas de:**

- Dos **ángulos suplementarios** cumplen que:
  $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \quad \cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha \quad \text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
- Dos **ángulos que se diferencian en 180°** cumplen que:
  $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \quad \cos\,(180° + \alpha) = -\cos\alpha \quad \text{tg}\,(180° + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$
- Dos **ángulos opuestos** cumplen que:
  $\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \quad \cos\,(-\alpha) = \cos\alpha \quad \text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

158

Actividades 7

66 Sin ayuda de la calculadora, y partiendo de las razones de los ángulos notables, determina las razones trigonométricas de:
a) 120° d) 225°
b) 150° e) 300°
c) 210° f) 315°
Reflexiona sobre ello dibujando una circunferencia y situando en cada caso el ángulo en el cuadrante correspondiente.

67 Las razones trigonométricas de un ángulo son:
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$
Halla las razones de su suplementario.

68 Calcula las razones del opuesto del ángulo que cumple que:
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$$
¿En qué cuadrante está situado cada uno?

69 Busca un ángulo cuyas razones coincidan con las de su opuesto.
- ¿Cuál es?
- ¿Cuáles son sus razones?

70 Un ángulo del primer cuadrante tiene estas razones:
$$\cos\alpha = \frac{12}{13} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$$
Halla las razones del que resulta de sumarle 180°.

71 Si sen 43° ≈ 0,6820, aproxima, sin usar la calculadora:
a) sen 317° c) sen 223°
b) sen 137° d) cos 47°

72 Observa que a cada ángulo le corresponde un solo valor para el seno, otro para el coseno y otro para la tangente. Sin embargo, al revés esto no es cierto.
a) Traza en una circunferencia goniométrica todos los ángulos que cumplan que tg α = −1. ¿Cuántos hay? ¿En qué cuadrantes están?
b) Determina con la calculadora el ángulo que tenga tg α = −1. ¿Qué obtienes? ¿En qué cuadrante?

73 Fíjate en el ejercicio anterior. Si hay más de una solución, ¿cuál nos da la calculadora? Contesta y completa la tabla en tu cuaderno.

		Calculadora	Además…
sen α	> 0	×	×
	< 0	×	×
cos α	> 0	×	×
	< 0	×	×
tg α	> 0	×	×
	< 0	4.° cuadrante	2.° cuadrante

EJERCICIO RESUELTO

Encuentra los ángulos tales que: $\cos\beta = -\frac{1}{2}$

Solución

Hay dos ángulos con ese coseno: uno en el segundo cuadrante, 180° − α, y otro en el tercero, 180° + α.

La calculadora nos da el del segundo cuadrante:
$$\text{arc cos}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$$
Sus razones están relacionadas con las de su suplementario: α + 180° − 120° = 60°

El otro ángulo, el que ocupa el tercer cuadrante, será:
$$\beta = 180° + 60° = 240°$$

74 Indica cuántos ángulos entre 0° y 360° cumplen que:
a) sen α = −0,342 c) $\text{tg}\,\alpha = 2 + \sqrt{3}$
b) cos α = 0,848
Hállalos. ¿En qué cuadrantes están?

75 Determina con ayuda de la calculadora y la circunferencia goniométrica un ángulo que cumpla:
a) cos α = −0,656 en el tercer cuadrante.
b) sen α = 0,327 en el segundo cuadrante.
c) tg α = −11,43 en el segundo cuadrante.
Redondea los ángulos, en grados, a las unidades.

Investiga

76 Abre una hoja en GeoGebra solo con los ejes de coordenadas y, a continuación:
- Traza una circunferencia goniométrica. Amplíala para acercarla.
- Señala un punto, *P*, sobre la circunferencia en el primer cuadrante. Muestra sus coordenadas y traza en naranja el segmento del seno y en verde el del coseno.
- Marca el ángulo correspondiente y llámalo α. Muestra su nombre y su valor.
- Gira *P* 90°. Repite con *P'* el proceso realizado con *P*. Nombra el ángulo correspondiente, β.

Ahora pincha y arrastra *P*. Observa qué ocurre y contesta: ¿Qué relación hay entre α y β? ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de α y β?

159

Sugerencias didácticas

Para trabajar las relaciones entre las razones de ángulos suplementarios, con 180° de diferencia y opuestos es imprescindible la representación gráfica. Utilizando las actividades que se dan con Geogebra el alumno puede determinar cuáles son esas relaciones y expresarlas por escrito. Resaltar que no es necesario memorizarlas si no recordar cómo deducirlo gráficamente.

Soluciones de las actividades

66 Sin ayuda de la calculadora, y partiendo de las razones de los ángulos notables, determina las razones trigonométricas de:

a) 120° b) 150° c) 210° d) 225° e) 300° f) 315°

Reflexiona sobre ello dibujando una circunferencia y situando en cada caso el ángulo en el cuadrante correspondiente.

a) Segundo cuadrante $\rightarrow 120° = 180° - 60°$

$$\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2} \qquad \text{tg}\,120° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$$

b) Segundo cuadrante $\rightarrow 150° = 180° - 30°$

$$\text{sen}\,(150°) = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}\,150° = -\text{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Tercer cuadrante $\rightarrow 210° = 180° + 30°$

$$\text{sen}\,210° = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2} \qquad \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \sqrt{3}$$

d) Tercer cuadrante $\rightarrow 225° = 180° + 45°$

$$\text{sen}\,225° = -\text{sen}\,45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 225° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg}\,225° = \text{tg}\,45° = 1$$

e) Cuarto cuadrante $\rightarrow 300° = -60°$

$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

f) Cuarto cuadrante $\rightarrow 315° = -45°$

$\text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \cos 315° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \text{tg } 315° = -\text{tg } 45° = -1$

67 Las razones trigonométricas de un ángulo son: $\text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\qquad \cos \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

Halla las razones de su suplementario.

Determinamos primero las razones de α sabiendo que pertenece al primer cuadrante.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría: $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\sqrt{2}/3}{\sqrt{7}/3} = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$

Y entonces las razones del suplementario son:

$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ $\qquad \text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

68 Calcula las razones del opuesto del ángulo que cumple que: $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$ $\quad \text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4}$

¿En qué cuadrante está situado cada uno?

Si el seno y la tangente son positivos el ángulo α pertenece al primer cuadrante. Hallamos el coseno:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3/5}{\cos \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Y entonces el opuesto pertenece al cuarto cuadrante y sus razones son:

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha = -\dfrac{3}{5}$ $\qquad \cos(-\alpha) = \cos \alpha = \dfrac{4}{5}$ $\qquad \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha = -\dfrac{3}{4}$

69 Busca un ángulo cuyas razones coincidan con las de su opuesto.

- ¿Cuál es?
- ¿Cuáles son sus razones?

Si las razones coinciden con las de su opuesto es porque:

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha = \text{sen } \alpha \rightarrow \text{sen } \alpha = 0$ $\qquad \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha \rightarrow \text{tg } \alpha = 0$

Los ángulos cuyas razones coinciden con las de su opuesto son:

- 360° $\rightarrow \text{sen}(-360°) = -\text{sen } 0° = 0$ $\qquad \cos(-360°) = \cos 0° = 1$ $\qquad \text{tg}(-360°) = -\text{tg } 0° = 0$
- 180° $\rightarrow \text{sen}(-180°) = -\text{sen } 180° = 0$ $\qquad \cos(-180°) = \cos 180° = -1$ $\qquad \text{tg}(-180°) = -\text{tg } 180° = 0$

70 Un ángulo del primer cuadrante tiene estas razones: $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$ $\qquad \text{tg } \alpha = \dfrac{5}{12}$

Halla las razones del que resulta de sumarle 180°.

Si el coseno y la tangente son positivos el ángulo α pertenece al primer cuadrante. Hallamos el seno:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\text{sen } \alpha}{12/13} \rightarrow \frac{5}{13} = \text{sen } \alpha$$

Y entonces las razones del obtenido tras sumar 180° son:

$\text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen } \alpha = -\dfrac{5}{13}$ $\qquad \cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha = -\dfrac{12}{13}$ $\qquad \text{tg}(180° + \alpha) = \text{tg } \alpha = \dfrac{5}{12}$

71 Si sen 43° ≈ 0,6820, aproxima, sin usar la calculadora:

a) sen 317° $\qquad$ b) sen 137° $\qquad$ c) sen 223° $\qquad$ d) cos 47°

a) $\text{sen } 317° = \text{sen}(-43°) = -\text{sen } 43° \approx -0,6820$

c) $\text{sen}(223°) = \text{sen}(180° + 43°) = -\text{sen } 43° \approx -0,6820$

b) $\text{sen } 137° = \text{sen}(180° - 43°) = \text{sen } 43° \approx 0,6820$

d) $\cos 47° = \cos(90° - 43°) = \text{sen } 43° \approx 0,6820$

72 Observa que a cada ángulo le corresponde un solo valor para el seno, otro para el coseno y otro para la tangente. Sin embargo, al revés esto no es cierto.

a) Traza en una circunferencia goniométrica todos los ángulos que cumplan que tg $\alpha = -1$. ¿Cuántos hay? ¿En qué cuadrantes están?

b) Determina con la calculadora el ángulo que tenga tg $\alpha = -1$. ¿Qué obtienes? ¿En qué cuadrante?

a) Obtenemos dos posibles ángulos, uno en el segundo cuadrante y otro en el cuarto.

b) La calculadora solo nos da un valor: $\text{arc tg}\,(-1) = -45°$, en el cuarto cuadrante.

73 Fíjate en el ejercicio anterior. Si hay más de una solución, ¿cuál nos da la calculadora? Contesta y completa la tabla en tu cuaderno.

		Calculadora	Además...
sen α	> 0	1.er cuadrante	2.º cuadrante
	< 0	4.º cuadrante	3.er cuadrante
cos α	> 0	1.er cuadrante	4.º cuadrante
	< 0	2.º cuadrante	3.er cuadrante
tg α	> 0	1.er cuadrante	3.er cuadrante
	< 0	4.º cuadrante	2.º cuadrante

74 Indica cuántos ángulos entre 0° y 360° cumplen que: **a)** sen $\alpha = -0{,}342$ **b)** cos $\alpha = 0{,}848$ **c)** tg $\alpha = 2 + \sqrt{3}$

Hállalos. ¿En qué cuadrantes están?

En todos los casos hay dos soluciones:

a) La calculadora da la solución del cuarto cuadrante: $\alpha = \text{arc sen}\,(-0{,}342) \approx -20° = 340°$

La del tercer cuadrante sería: $\beta \approx 180° + 20° = 200°$

b) La calculadora da la solución del primer cuadrante: $\alpha = \text{arc cos}\,0{,}848 \approx 32°$

La del cuarto cuadrante sería: $\beta \approx -32° = 328°$

c) La calculadora da la solución del primer cuadrante: $\alpha = \text{arc tg}\left(2 + \sqrt{3}\right) = 75°$

La del tercer cuadrante sería: $\beta = 180° + 75° = 255°$

75 Determina con ayuda de la calculadora y la circunferencia goniométrica un ángulo que cumpla:

a) cos $\alpha = -0{,}656$ en el tercer cuadrante.

b) sen $\alpha = 0{,}327$ en el segundo cuadrante.

c) tg $\alpha = -11{,}43$ en el segundo cuadrante.

Redondea los ángulos, en grados, a las unidades.

a) La calculadora da la solución del segundo cuadrante: $\alpha = \text{arc cos}\,(-0{,}656) \approx 131°$

La del tercer cuadrante sería: $\beta = -131° = 229°$

b) La calculadora da la solución del primer cuadrante: $\alpha = \text{arc sen}\,0{,}327 \approx 19°$

La del segundo cuadrante sería: $\beta \approx 180° - 19° = 161°$

c) La calculadora da la solución del cuarto cuadrante: $\alpha = \text{arc tg}\,(-11{,}43) \approx -85° = 275°$

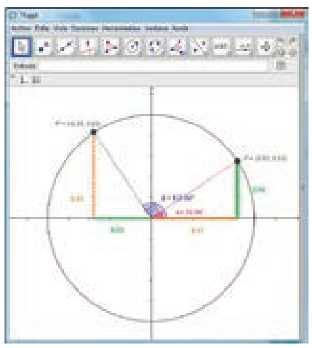
La del segundo cuadrante sería: $\beta \approx 180° - 85° = 95°$

Investiga

76 Abre una hoja en GeoGebra solo con los ejes de coordenadas y, a continuación:

- Traza una circunferencia goniométrica. Amplíala para acercarla.
- Señala un punto, *P*, sobre la circunferencia en el primer cuadrante. Muestra sus coordenadas y traza en naranja el segmento del seno y en verde el del coseno.
- Marca el ángulo correspondiente y llámalo α. Muestra su nombre y su valor.
- Gira *P* 90º. Repite con *P'* el proceso realizado con *P*. Nombra el ángulo correspondiente, β.

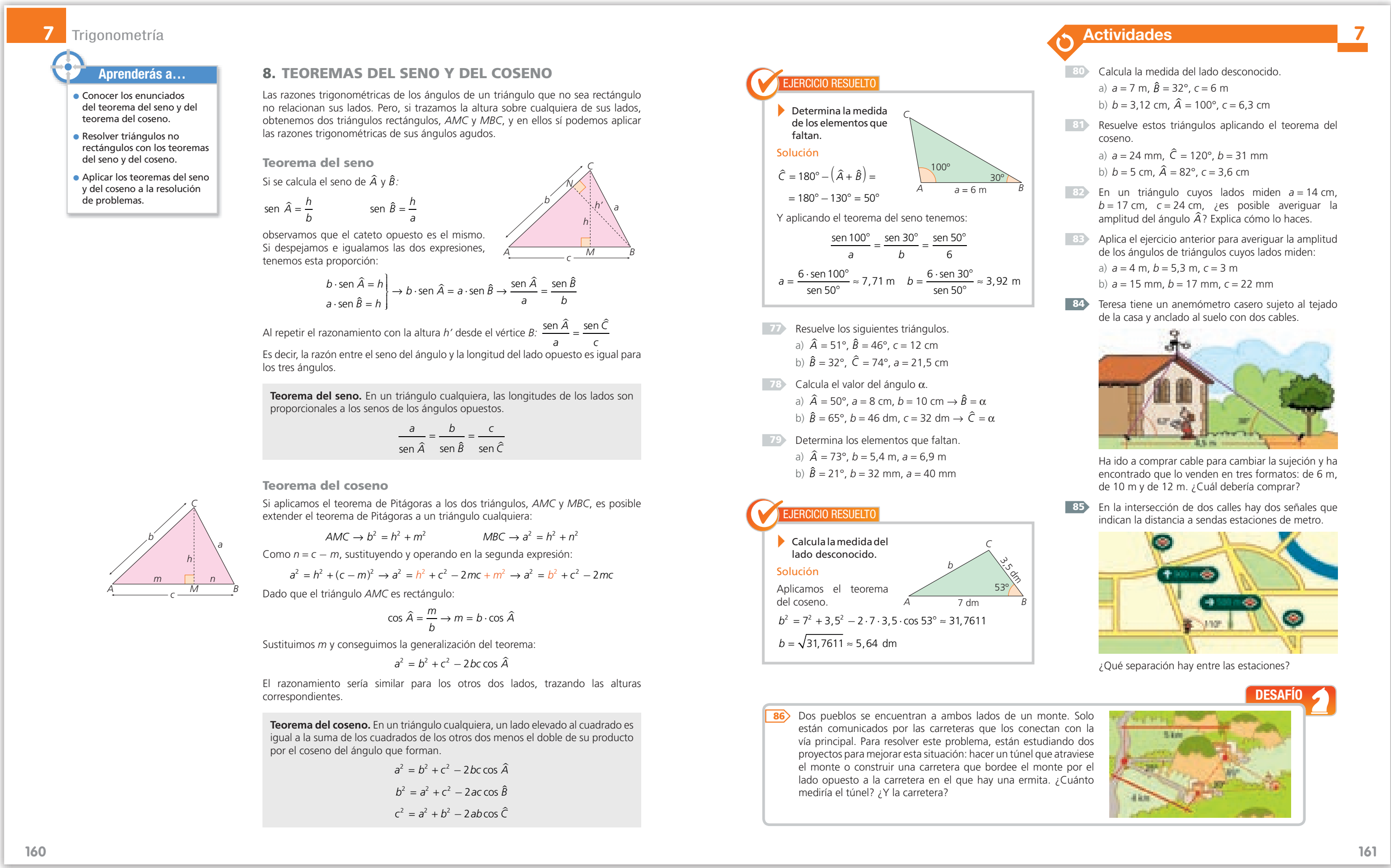
Ahora pincha y arrastra *P*. Observa qué ocurre y contesta: ¿Qué relación hay entre α y β? ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de α y β?



Los ángulos son α y $\beta = 90° + \alpha$. Se observa que sus razones se relacionan de la siguiente manera:

$$\text{sen}\left(90° + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(90° + \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \tan\left(90° + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

8. Teorema del seno y del coseno



Aprenderás a…

- Conocer los enunciados del teorema del seno y del teorema del coseno.
- Resolver triángulos no rectángulos con los teoremas del seno y del coseno.
- Aplicar los teoremas del seno y del coseno a la resolución de problemas.

8. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

Las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo que no sea rectángulo no relacionan sus lados. Pero, si trazamos la altura sobre cualquiera de sus lados, obtenemos dos triángulos rectángulos, *AMC* y *MBC*, y en ellos sí podemos aplicar las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.

Teorema del seno

Si se calcula el seno de $\hat{A}$ y $\hat{B}$:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{b} \qquad \text{sen } \hat{B} = \frac{h}{a}$$

observamos que el cateto opuesto es el mismo. Si despejamos e igualamos las dos expresiones, tenemos esta proporción:

$$\left.\begin{array}{l} b \cdot \text{sen } \hat{A} = h \\ a \cdot \text{sen } \hat{B} = h \end{array}\right\} \rightarrow b \cdot \text{sen } \hat{A} = a \cdot \text{sen } \hat{B} \rightarrow \frac{\text{sen } \hat{A}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{b}$$

Al repetir el razonamiento con la altura *h'* desde el vértice *B*: $\frac{\text{sen } \hat{A}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{c}$

Es decir, la razón entre el seno del ángulo y la longitud del lado opuesto es igual para los tres ángulos.

Teorema del seno. En un triángulo cualquiera, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Teorema del coseno

Si aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos, *AMC* y *MBC*, es posible extender el teorema de Pitágoras a un triángulo cualquiera:

$$AMC \rightarrow b^2 = h^2 + m^2 \qquad MBC \rightarrow a^2 = h^2 + n^2$$

Como $n = c - m$, sustituyendo y operando en la segunda expresión:

$$a^2 = h^2 + (c-m)^2 \rightarrow a^2 = h^2 + c^2 - 2mc + m^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2mc$$

Dado que el triángulo *AMC* es rectángulo:

$$\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A}$$

Sustituimos *m* y conseguimos la generalización del teorema:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

El razonamiento sería similar para los otros dos lados, trazando las alturas correspondientes.

Teorema del coseno. En un triángulo cualquiera, un lado elevado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

EJERCICIO RESUELTO

Determina la medida de los elementos que faltan.

Solución

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - 130° = 50°$$

Y aplicando el teorema del seno tenemos:

$$\frac{\text{sen } 100°}{a} = \frac{\text{sen } 30°}{b} = \frac{\text{sen } 50°}{6}$$

$$a = \frac{6 \cdot \text{sen } 100°}{\text{sen } 50°} \approx 7{,}71 \text{ m} \qquad b = \frac{6 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 50°} \approx 3{,}92 \text{ m}$$

77 Resuelve los siguientes triángulos.
a) $\hat{A} = 51°$, $\hat{B} = 46°$, $c = 12$ cm
b) $\hat{B} = 32°$, $\hat{C} = 74°$, $a = 21{,}5$ cm

78 Calcula el valor del ángulo α.
a) $\hat{A} = 50°$, $a = 8$ cm, $b = 10$ cm $\rightarrow \hat{B} = \alpha$
b) $\hat{B} = 65°$, $b = 46$ dm, $c = 32$ dm $\rightarrow \hat{C} = \alpha$

79 Determina los elementos que faltan.
a) $\hat{A} = 73°$, $b = 5{,}4$ m, $a = 6{,}9$ m
b) $\hat{B} = 21°$, $b = 32$ mm, $a = 40$ mm

EJERCICIO RESUELTO

Calcula la medida del lado desconocido.

Solución

Aplicamos el teorema del coseno.

$$b^2 = 7^2 + 3{,}5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3{,}5 \cdot \cos 53° \approx 31{,}7611$$

$$b = \sqrt{31{,}7611} \approx 5{,}64 \text{ dm}$$

Actividades 7

80 Calcula la medida del lado desconocido.
a) $a = 7$ m, $\hat{B} = 32°$, $c = 6$ m
b) $b = 3{,}12$ cm, $\hat{A} = 100°$, $c = 6{,}3$ cm

81 Resuelve estos triángulos aplicando el teorema del coseno.
a) $a = 24$ mm, $\hat{C} = 120°$, $b = 31$ mm
b) $b = 5$ cm, $\hat{A} = 82°$, $c = 3{,}6$ cm

82 En un triángulo cuyos lados miden $a = 14$ cm, $b = 17$ cm, $c = 24$ cm, ¿es posible averiguar la amplitud del ángulo $\hat{A}$? Explica cómo lo haces.

83 Aplica el ejercicio anterior para averiguar la amplitud de los ángulos de triángulos cuyos lados miden:
a) $a = 4$ m, $b = 5{,}3$ m, $c = 3$ m
b) $a = 15$ mm, $b = 17$ mm, $c = 22$ mm

84 Teresa tiene un anemómetro casero sujeto al tejado de la casa y anclado al suelo con dos cables.

Ha ido a comprar cable para cambiar la sujeción y ha encontrado que lo venden en tres formatos: de 6 m, de 10 m y de 12 m. ¿Cuál debería comprar?

85 En la intersección de dos calles hay dos señales que indican la distancia a sendas estaciones de metro.

¿Qué separación hay entre las estaciones?

DESAFÍO

86 Dos pueblos se encuentran a ambos lados de un monte. Solo están comunicados por las carreteras que los conectan con la vía principal. Para resolver este problema, están estudiando dos proyectos para mejorar esta situación: hacer un túnel que atraviese el monte o construir una carretera que bordee el monte por el lado opuesto a la carretera en el que hay una ermita. ¿Cuánto mediría el túnel? ¿Y la carretera?

Sugerencias didácticas

Extendemos el uso de las razones trigonométricas a cualquier triángulo. Con estos dos teoremas podemos volver sobre la introducción del tema. Midiendo ángulos y con una longitud conocida podemos determinar todos los lados de un triángulo.

La utilidad de la medida de triángulos puede servir como motivación de este epígrafe. En este nivel, aunque no las vayan a aprender, conviene trabajar las demostraciones de estos resultados para que vean su validez y aprendan del razonamiento.

Soluciones de las actividades

77 Resuelve los siguientes triángulos.

a) $\hat{A} = 51°$, $\hat{B} = 46°$, $c = 12$ cm

b) $\hat{B} = 32°$, $\hat{C} = 74°$, $a = 21{,}5$ cm

a) Teorema del seno: $\hat{C} = 180° - (51° + 46°) = 83°$ $\quad \frac{\text{sen } 51°}{a} = \frac{\text{sen } 46°}{b} = \frac{\text{sen } 83°}{12} \rightarrow \begin{cases} a \approx 9{,}40 \text{ cm} \\ b \approx 8{,}70 \text{ cm} \end{cases}$

b) Teorema del seno: $\hat{A} = 180° - (32° + 74°) = 74°$ $\quad \frac{\text{sen } 74°}{21{,}5} = \frac{\text{sen } 32°}{b} = \frac{\text{sen } 74°}{c} \rightarrow \begin{cases} b \approx 11{,}85 \text{ cm} \\ c \approx 21{,}5 \text{ cm} \end{cases}$

78 Calcula el valor del ángulo α.

a) $\hat{A} = 50°$, $a = 8$ cm, $b = 10$ cm $\rightarrow \hat{B} = \alpha$

b) $\hat{B} = 65°$, $b = 46$ dm, $c = 32$ dm $\rightarrow \hat{C} = \alpha$

a) $\frac{\text{sen } 50°}{8} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{10} \rightarrow \hat{B} = \text{arc sen } \frac{10 \cdot \text{sen } 50°}{8} \approx 73°\, 14'\, 48{,}69''$

b) $\frac{\text{sen } 65°}{46} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{32} \rightarrow \hat{C} = \text{arc sen } \frac{32 \cdot \text{sen } 65°}{46} \approx 39°\, 5'\, 6{,}63''$

79 Determina los elementos que faltan.

a) $\hat{A} = 73°$, $b = 5{,}4$ m, $a = 6{,}9$ m

b) $\hat{B} = 21°$, $b = 32$ mm, $a = 40$ mm

a) $\dfrac{\text{sen } 73°}{6,9} = \dfrac{\text{sen } \hat{B}}{5,4} = \dfrac{\text{sen } \hat{C}}{c} \rightarrow \hat{B} = \text{arc sen } \dfrac{5,4 \cdot \text{sen } 73°}{6,9} \approx 48°\, 27'\, 11''$

$\hat{C} = 180° - (73° + 48°27'11'') = 58°32'49'' \rightarrow c = \dfrac{6,9 \cdot \text{sen}(58°32'49'')}{\text{sen } 73°} \approx 6,16 \text{ m}$

b) $\dfrac{\text{sen } \hat{A}}{40} = \dfrac{\text{sen } 21°}{32} = \dfrac{\text{sen } \hat{C}}{c} \rightarrow \hat{A} = \text{arc sen } \dfrac{40 \cdot \text{sen } 21°}{32} \approx 26°36'46''$

$\hat{C} = 180° - (21° + 26°36'46'') = 132°23'14'' \rightarrow c = \dfrac{32 \cdot \text{sen}(132°23'14'')}{\text{sen } 21°} \approx 65,95 \text{ mm}$

80 Calcula la medida del lado desconocido.

a) $a = 7$ m, $\hat{B} = 32°$, $c = 6$ m **b)** $b = 3,12$ cm, $\hat{A} = 100°$, $c = 6,3$ cm

a) Teorema del coseno: $b = \sqrt{7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos 32°} \approx 3,71$ m

b) Teorema del coseno: $a = \sqrt{3,12^2 + 6,3^2 - 2 \cdot 3,12 \cdot 6,3 \cdot \cos 100°} \approx 7,5$ cm

81 Resuelve estos triángulos aplicando el teorema del coseno.

a) $a = 24$ mm, $\hat{C} = 120°$, $b = 31$ mm **b)** $b = 5$ cm, $\hat{A} = 82°$, $c = 3,6$ cm

a) $c = \sqrt{24^2 + 31^2 - 2 \cdot 24 \cdot 31 \cdot \cos 120°} \approx 47,76$ mm

$\dfrac{\text{sen } \hat{A}}{24} = \dfrac{\text{sen } \hat{B}}{31} = \dfrac{\text{sen } 120°}{47,76} \rightarrow \hat{A} = \text{arc sen } \dfrac{24 \cdot \text{sen } 120°}{47,76} \approx 25°\, 47'\, 50''$

$\hat{B} = 180° - (120° + 25°47'50'') = 34°\, 12'\, 10''$

b) $a = \sqrt{5^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3,6 \cdot \cos 82°} \approx 5,74$ cm

$\dfrac{\text{sen } 82°}{5,74} = \dfrac{\text{sen } \hat{B}}{5} = \dfrac{\text{sen } \hat{C}}{3,6} \rightarrow \hat{B} = \text{arc sen } \dfrac{5 \cdot \text{sen } 82°}{5,74} \approx 59°\, 36'\, 36''$

$\hat{C} = 180° - (82° + 59°36'36'') = 38°\, 23'\, 24''$

82 En un triángulo cuyos lados miden $a = 14$ cm, $b = 17$ cm, $c = 24$ cm, ¿es posible averiguar la amplitud del ángulo $\hat{A}$? Explica cómo lo haces.

Despejando en el teorema del coseno: $\hat{A} = \text{arc cos}\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) = \text{arc cos}\left(\dfrac{17^2 + 24^2 - 14^2}{2 \cdot 17 \cdot 24}\right) \approx 34°\, 55'\, 48''$

83 Aplica el ejercicio anterior para averiguar la amplitud de los ángulos de triángulos cuyos lados miden:

a) $a = 4$ m, $b = 5,3$ m, $c = 3$ m **b)** $a = 15$ mm, $b = 17$ mm, $c = 22$ mm

a) $\hat{A} = \text{arc cos}\left(\dfrac{5,3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 5,3 \cdot 3}\right) \approx 48°\, 27'\, 18''$ $\quad \hat{B} = \text{arc cos}\left(\dfrac{4^2 + 3^2 - 5,3^2}{2 \cdot 4 \cdot 3}\right) \approx 97°\, 23'\, 51''$

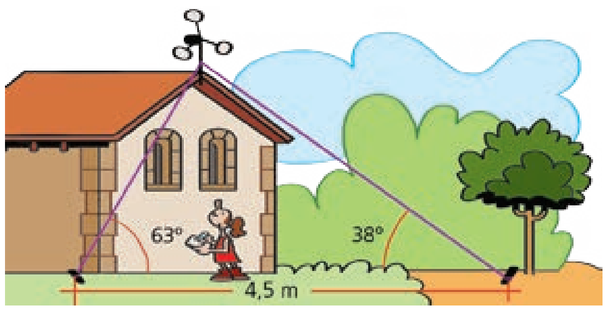
$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 34°\, 8'\, 51''$

b) $\hat{A} = \text{arc cos}\left(\dfrac{17^2 + 22^2 - 15^2}{2 \cdot 17 \cdot 22}\right) \approx 42°\, 53'\, 37''$ $\quad \hat{B} = \text{arc cos}\left(\dfrac{15^2 + 22^2 - 17^2}{2 \cdot 15 \cdot 22}\right) \approx 50°\, 28'\, 44''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 86°\, 37'\, 39''$

84 Teresa tiene un anemómetro casero sujeto al tejado de la casa y anclado al suelo con dos cables.

Ha ido a comprar cable para cambiar la sujeción y ha encontrado que lo venden en tres formatos: de 6 m, de 10 m y de 12 m. ¿Cuál debería comprar?



Hallamos la longitud de los cables con el teorema del seno:

$\hat{A} = 180° - (63° + 38°) = 79°$

$\dfrac{\text{sen } 79°}{4,5} = \dfrac{\text{sen } 63°}{b} = \dfrac{\text{sen } 38°}{c} \rightarrow \begin{cases} b \approx 4,085 \text{ m} \\ c \approx 2,822 \text{ m} \end{cases}$

La longitud total que precisa es de 6,907 m. Deberá comprar el rollo de 10 m.

85 En la intersección de dos calles hay dos señales que indican la distancia a sendas estaciones de metro.

¿Qué separación hay entre las estaciones?

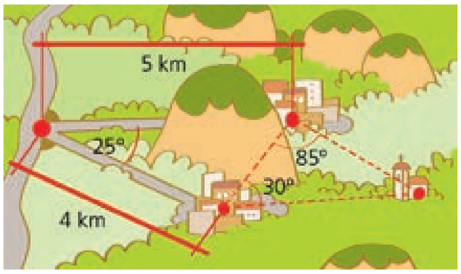
Hallamos la distancia con el teorema del coseno:

$$a = \sqrt{500^2 + 900^2 - 2 \cdot 500 \cdot 900 \cdot \cos 110°} \approx 1170$$

La separación entre las estaciones es de 1 170 m.

Desafío

86 Dos pueblos se encuentran a ambos lados de un monte. Solo están comunicados por las carreteras que los conectan con la vía principal. Para resolver este problema, están estudiando dos proyectos para mejorar esta situación: hacer un túnel que atraviese el monte o construir una carretera que bordee el monte por el lado opuesto a la carretera en el que hay una ermita. ¿Cuánto mediría el túnel? ¿Y la carretera?



Hallamos la longitud que tendría el túnel aplicando el teorema del coseno:

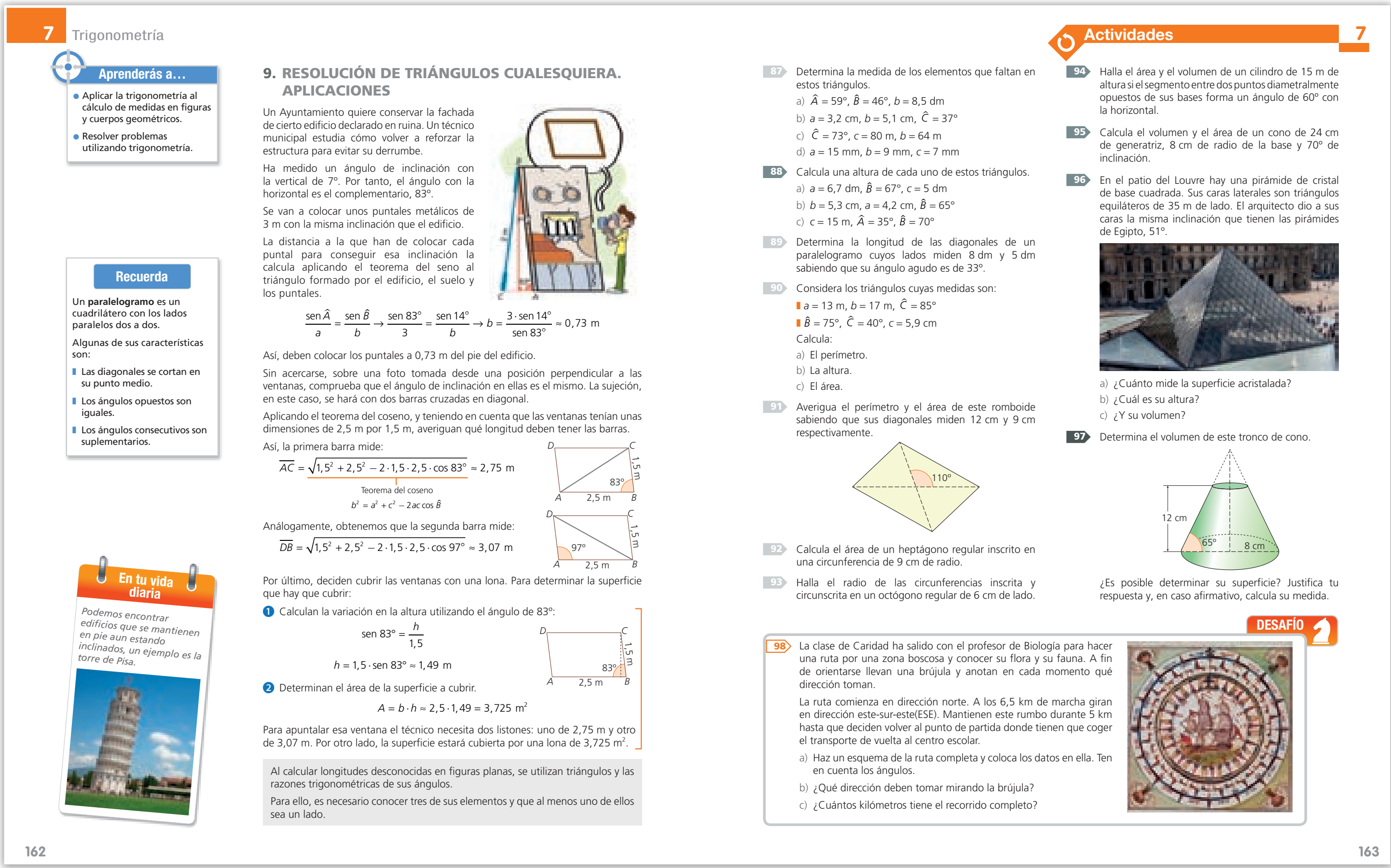
$$a = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 25°} \approx 2{,}179 \text{ km}$$

Y la de la carretera aplicando el teorema del seno:

$$\hat{A} = 180° - (30° + 85°) = 65° \rightarrow \frac{\text{sen } 65°}{2{,}179} = \frac{\text{sen } 30°}{b} = \frac{\text{sen } 85°}{c} \rightarrow \begin{cases} b \approx 1{,}202 \text{ km} \\ c \approx 2{,}395 \text{ km} \end{cases}$$

El túnel mediría 2,179 km y la carretera, en total, 3,597 km.

9. Resolución de triángulos cualesquiera. Aplicaciones


7 Trigonometría

Aprenderás a…

- Aplicar la trigonometría al cálculo de medidas en figuras y cuerpos geométricos.
- Resolver problemas utilizando trigonometría.

Recuerda

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos.

Algunas de sus características son:

- Las diagonales se cortan en su punto medio.
- Los ángulos opuestos son iguales.
- Los ángulos consecutivos son suplementarios.

En tu vida diaria

Podemos encontrar edificios que se mantienen en pie aun estando inclinados, un ejemplo es la torre de Pisa.

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA. APLICACIONES

Un Ayuntamiento quiere conservar la fachada de cierto edificio declarado en ruina. Un técnico municipal estudia cómo volver a reforzar la estructura para evitar su derrumbe.

Ha medido un ángulo de inclinación con la vertical de 7°. Por tanto, el ángulo con la horizontal es el complementario, 83°.

Se van a colocar unos puntales metálicos de 3 m con la misma inclinación que el edificio.

La distancia a la que han de colocar cada puntal para conseguir esa inclinación la calcula aplicando el teorema del seno al triángulo formado por el edificio, el suelo y los puntales.

$$\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{a} = \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{b} \rightarrow \frac{\text{sen}\,83°}{3} = \frac{\text{sen}\,14°}{b} \rightarrow b = \frac{3 \cdot \text{sen}\,14°}{\text{sen}\,83°} \approx 0{,}73 \text{ m}$$

Así, deben colocar los puntales a 0,73 m del pie del edificio.

Sin acercarse, sobre una foto tomada desde una posición perpendicular a las ventanas, comprueba que el ángulo de inclinación en ellas es el mismo. La sujeción, en este caso, se hará con dos barras cruzadas en diagonal.

Aplicando el teorema del coseno, y teniendo en cuenta que las ventanas tenían unas dimensiones de 2,5 m por 1,5 m, averiguan qué longitud deben tener las barras.

Así, la primera barra mide:

$$\overline{AC} = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}5^2 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot \cos 83°} \approx 2{,}75 \text{ m}$$

Teorema del coseno $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

Análogamente, obtenemos que la segunda barra mide:

$$\overline{DB} = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}5^2 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot \cos 97°} \approx 3{,}07 \text{ m}$$

Por último, deciden cubrir las ventanas con una lona. Para determinar la superficie que hay que cubrir:

1. Calculan la variación en la altura utilizando el ángulo de 83°:

$$\text{sen}\,83° = \frac{h}{1{,}5}$$

$$h = 1{,}5 \cdot \text{sen}\,83° \approx 1{,}49 \text{ m}$$

2. Determinan el área de la superficie a cubrir.

$$A = b \cdot h \approx 2{,}5 \cdot 1{,}49 = 3{,}725 \text{ m}^2$$

Para apuntalar esa ventana el técnico necesita dos listones: uno de 2,75 m y otro de 3,07 m. Por otro lado, la superficie estará cubierta por una lona de 3,725 m².

Al calcular longitudes desconocidas en figuras planas, se utilizan triángulos y las razones trigonométricas de sus ángulos.

Para ello, es necesario conocer tres de sus elementos y que al menos uno de ellos sea un lado.

Actividades 7

87 Determina la medida de los elementos que faltan en estos triángulos.
a) $\hat{A} = 59°$, $\hat{B} = 46°$, $b = 8{,}5$ dm
b) $a = 3{,}2$ cm, $b = 5{,}1$ cm, $\hat{C} = 37°$
c) $\hat{C} = 73°$, $c = 80$ m, $b = 64$ m
d) $a = 15$ mm, $b = 9$ mm, $c = 7$ mm

88 Calcula una altura de cada uno de estos triángulos.
a) $a = 6{,}7$ dm, $\hat{B} = 67°$, $c = 5$ dm
b) $b = 5{,}3$ cm, $a = 4{,}2$ cm, $\hat{B} = 65°$
c) $c = 15$ m, $\hat{A} = 35°$, $\hat{B} = 70°$

89 Determina la longitud de las diagonales de un paralelogramo cuyos lados miden 8 dm y 5 dm sabiendo que su ángulo agudo es de 33°.

90 Considera los triángulos cuyas medidas son:
- $a = 13$ m, $b = 17$ m, $\hat{C} = 85°$
- $\hat{B} = 75°$, $\hat{C} = 40°$, $c = 5{,}9$ cm

Calcula:
a) El perímetro.
b) La altura.
c) El área.

91 Averigua el perímetro y el área de este romboide sabiendo que sus diagonales miden 12 cm y 9 cm respectivamente.

92 Calcula el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 9 cm de radio.

93 Halla el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita en un octógono regular de 6 cm de lado.

94 Halla el área y el volumen de un cilindro de 15 m de altura si el segmento entre dos puntos diametralmente opuestos de sus bases forma un ángulo de 60° con la horizontal.

95 Calcula el volumen y el área de un cono de 24 cm de generatriz, 8 cm de radio de la base y 70° de inclinación.

96 En el patio del Louvre hay una pirámide de cristal de base cuadrada. Sus caras laterales son triángulos equiláteros de 35 m de lado. El arquitecto dio a sus caras la misma inclinación que tienen las pirámides de Egipto, 51°.
a) ¿Cuánto mide la superficie acristalada?
b) ¿Cuál es su altura?
c) ¿Y su volumen?

97 Determina el volumen de este tronco de cono.

¿Es posible determinar su superficie? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcula su medida.

DESAFÍO

98 La clase de Caridad ha salido con el profesor de Biología para hacer una ruta por una zona boscosa y conocer su flora y su fauna. A fin de orientarse llevan una brújula y anotan en cada momento qué dirección toman.

La ruta comienza en dirección norte. A los 6,5 km de marcha giran en dirección este-sur-este(ESE). Mantienen este rumbo durante 5 km hasta que deciden volver al punto de partida donde tienen que coger el transporte de vuelta al centro escolar.
a) Haz un esquema de la ruta completa y coloca los datos en ella. Ten en cuenta los ángulos.
b) ¿Qué dirección deben tomar mirando la brújula?
c) ¿Cuántos kilómetros tiene el recorrido completo?

162 163

Sugerencias didácticas

En este último epígrafe aplicamos todos los conocimientos de trigonometría a la resolución de problemas métricos. En cada caso deben decidir cuál de todos los contenidos de estas unidades es útil para resolver el problema. Tan importante como esos contenidos es insistir en que organicen la información del problema, nombren de forma clara los elementos implicados y expliquen el proceso seguido adecuadamente.

Soluciones de las actividades

87 Determina la medida de los elementos que faltan en estos triángulos.

a) $\hat{A} = 59°$, $\hat{B} = 46°$, $b = 8{,}5$ dm

b) $a = 3{,}2$ cm, $b = 5{,}1$ cm, $\hat{C} = 37°$

c) $\hat{C} = 73°$, $c = 80$ m, $b = 64$ m

d) $a = 15$ mm, $b = 9$ mm, $c = 7$ mm

a) $\hat{C} = 180° - (59° + 46°) = 75° \rightarrow \dfrac{\text{sen}\,59°}{a} = \dfrac{\text{sen}\,46°}{8{,}5} = \dfrac{\text{sen}\,75°}{c} \rightarrow \begin{cases} a \approx 10{,}13 \text{ dm} \\ c \approx 11{,}41 \text{ dm} \end{cases}$

b) $c = \sqrt{3{,}2^2 + 5{,}1^2 - 2 \cdot 3{,}2 \cdot 5{,}1 \cdot \cos 37°} \approx 3{,}19$ cm $\qquad \dfrac{\text{sen}\,\hat{A}}{3{,}2} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{B}}{5{,}1} = \dfrac{\text{sen}\,37°}{3{,}19} \rightarrow \hat{A} \approx 37°\,8'\,8''$

$\hat{B} = 180° - (\hat{C} + \hat{A}) \approx 105°\,51'\,52''$

c) $\dfrac{\text{sen}\,\hat{A}}{a} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{B}}{64} = \dfrac{\text{sen}\,73°}{80} \rightarrow \hat{B} = \text{arc sen}\,\dfrac{64 \cdot \text{sen}\,73°}{80} \approx 49°\,54'\,39''$

$\hat{A} = 180° - (73° + 49°\,54'\,39'') = 57°\,5'\,21'' \rightarrow a = 70{,}23$ m

d) $\hat{A} = \text{arc cos}\left(\dfrac{9^2 + 7^2 - 15^2}{2 \cdot 9 \cdot 7}\right) \approx 138°\,56'\,7'' \qquad \hat{B} = \text{arc cos}\left(\dfrac{15^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 15 \cdot 7}\right) \approx 23°\,12'\,46''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 17°\,51'\,7''$

88 Calcula una altura de cada uno de estos triángulos.

a) $a = 6{,}7$ dm, $\hat{B} = 67°$, $c = 5$ dm

b) $b = 5{,}3$ cm, $a = 4{,}2$ cm, $\hat{B} = 65°$

c) $c = 15$ m, $\hat{A} = 35°$, $\hat{B} = 70°$

a) La altura sobre a sería: $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{h_a}{c} \to \text{sen}\,67° = \dfrac{h_a}{5} \to h_a = 5 \cdot \text{sen}\,67° \approx 4{,}60$ dm

b) La altura sobre c sería: $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{h_c}{a} \to \text{sen}\,65° = \dfrac{h_c}{4{,}2} \to h_c = 4{,}2 \cdot \text{sen}\,65° \approx 3{,}81$ cm

c) La altura sobre a sería: $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{h_a}{c} \to \text{sen}\,70° = \dfrac{h_a}{15} \to h_a = 15 \cdot \text{sen}\,70° \approx 14{,}10$ m

89 Determina la longitud de las diagonales de un paralelogramo cuyos lados miden 8 dm y 5 dm sabiendo que su ángulo agudo es de 33°.

El ángulo obtuso mide: $180° - 33° = 147°$. Aplicando el teorema del coseno a los triángulos que forman las diagonales:

$d = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 147°} \approx 12{,}49$ dm $\qquad D = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 33°} \approx 4{,}68$ dm

90 Considera los triángulos cuyas medidas son:

- $a = 13$ m, $b = 17$ m, $\hat{C} = 85°$
- $\hat{B} = 75°$, $\hat{C} = 40°$, $c = 5{,}9$ cm

Calcula:

a) El perímetro. b) La altura. c) El área.

a) Hallamos el lado que falta: $c = \sqrt{13^2 + 17^2 - 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \cos 85°} \approx 20{,}48$ m

Perímetro: $P = a + b + c \approx 13 + 17 + 20{,}48 = 50{,}48$ m

La altura sobre a sería: $\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{h_a}{b} \to \text{sen}\,85° = \dfrac{h_a}{17} \to h_a = 17 \cdot \text{sen}\,85° \approx 16{,}94$ m

Área: $A = \dfrac{a \cdot h_a}{2} \approx \dfrac{13 \cdot 16{,}94}{2} = 110{,}11\ \text{m}^2$

b) Hallamos los lados que faltan:

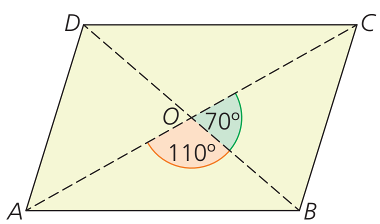
$\hat{A} = 180° - (75° + 40°) = 65° \to \dfrac{\text{sen}\,65°}{a} = \dfrac{\text{sen}\,75°}{b} = \dfrac{\text{sen}\,40°}{5{,}9} \to \begin{cases} a \approx 8{,}32 \text{ cm} \\ b \approx 8{,}87 \text{ cm} \end{cases}$

Perímetro: $P = a + b + c \approx 8{,}32 + 8{,}87 + 5{,}9 = 23{,}09$ cm

La altura sobre a sería: $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{h_a}{c} \to \text{sen}\,75° = \dfrac{h_a}{5{,}9} \to h_a = 5{,}9 \cdot \text{sen}\,75° \approx 5{,}70$ cm

Área: $A = \dfrac{a \cdot h_a}{2} \approx \dfrac{8{,}32 \cdot 5{,}70}{2} = 23{,}712\ \text{cm}^2$

91 Averigua el perímetro y el área de este romboide sabiendo que sus diagonales miden 12 cm y 9 cm respectivamente.



$\overline{AB} = 8{,}64$ cm $\quad \overline{OB} = 4{,}5$ cm
$\overline{BC} = 6{,}15$ cm $\quad \overline{OC} = 6$ cm

Los ángulos centrales miden: 110° y $180° - 110° = 70°$

Hallamos la longitud de sus lados aplicando el teorema del coseno a los triángulos *OAB* y *OBC* que forman las diagonales sabiendo que estas se cortan por su punto medio:

Lado mayor: $\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 110°} \approx 8{,}64$ cm

Lado menor: $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 70°} \approx 6{,}15$ cm

Luego el perímetro: $P \approx 2 \cdot (8{,}64 + 6{,}15) = 29{,}58$ cm

Necesitamos el ángulo en *A*, aplicando el teorema del coseno: $\hat{A} = \text{arc cos}\left(\dfrac{8{,}64^2 + 6{,}15^2 - 9^2}{2 \cdot 8{,}64 \cdot 6{,}15}\right) \approx 72°\ 46'\ 25''$

Así la altura sobre *AB* es: $\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{h_{AB}}{DA} \to \text{sen}\,(72°\ 46'\ 25'') = \dfrac{h_a}{6{,}15} \to h_a = 6{,}15 \cdot \text{sen}\,(72°\ 46'\ 25'') \approx 5{,}87$ cm

Y el área: $A = \overline{AB} \cdot h_{AB} = 8{,}64 \cdot 5{,}87 \approx 50{,}72\ \text{cm}^2$

92 Calcula el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 9 cm de radio.

Necesitamos conocer la longitud del lado y la apotema. Los triángulos isósceles que se forman al trazar los radios tienen ángulos: $\hat{A} = \dfrac{360°}{7} \approx 51,4°$ y $\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180° - \hat{A}}{2} = \dfrac{450}{7} \approx 64,3°$ y lados iguales $b = c = 9$ cm

Determinamos el lado a con el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{a} = \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{b} = \frac{\text{sen}\,\hat{C}}{c} \to \frac{\text{sen}\,51,4°}{a} = \frac{\text{sen}\,64,3°}{9} \to a = \frac{9 \cdot \text{sen}\,51,4°}{\text{sen}\,64,3°} \approx 7,81 \text{ cm}$$

Y la altura sobre a: $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{h_a}{c} \to \text{sen}\,64,3° = \dfrac{h_a}{7,81} \to h_a = 9 \cdot \text{sen}\,64,3° \approx 8,11$ cm

Área: $A = \dfrac{P \cdot a}{2} \approx \dfrac{7 \cdot 7,81 \cdot 8,11}{2} \approx 221,69 \text{ cm}^2$

93 Halla el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita en un octógono regular de 6 cm de lado.

Los triángulos isósceles que se forman al trazar los radios del octógono tienen ángulos:

$\hat{A} = \dfrac{360°}{8} \approx 45°$ $\quad\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180° - \hat{A}}{2} = 67,5°$ $\quad$ Lado desigual: $a = 6$ cm

Determinamos los lados b y c, radio de la circunferencia circunscrita con el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{a} = \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{b} = \frac{\text{sen}\,\hat{C}}{c} \to \frac{\text{sen}\,45°}{6} = \frac{\text{sen}\,67,5°}{b} = \frac{\text{sen}\,67,5°}{c} \to b = c = \frac{6 \cdot \text{sen}\,67,5°}{\text{sen}\,45°} \approx 7,84 \text{ cm}$$

Y la apotema, radio de la circunferencia inscrita con la razón seno:

$$\text{sen}\,67,5° = \frac{\text{apotema}}{b} \to \text{apotema} \approx 7,84 \cdot \text{sen}\,67,5° \approx 7,24 \text{ cm}$$

El radio de la circunferencia inscrita mide 7,24 cm y el de la circunscrita 7,84 cm.

94 Halla el área y el volumen de un cilindro de 15 m de altura si el segmento entre dos puntos diametralmente opuestos de sus bases forma un ángulo de 60° con la horizontal.

Si el segmento mayor que atraviesa el cilindro mide 15 m podemos determinar el diámetro de la base conociendo el ángulo:

$\text{tg}\,60° = \dfrac{15}{d} \to d = \dfrac{15}{\text{tg}\,60°} \approx 8,66$ m

Y, entonces el área y volumen resultan:

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r \cdot (r + h) \approx 2 \cdot \pi \cdot 4,33 \cdot (4,33 + 15) \approx 525,90 \text{ m}^2$

$V = \pi r^2 h \approx \pi \cdot 4,33^2 \cdot 15 \approx 883,52 \text{ m}^3$

95 Calcula el volumen y el área de un cono de 24 cm de generatriz, 8 cm de radio de la base y 70° de inclinación.

Calculamos la altura del cono: $\text{tg}\,70° = \dfrac{h}{8} \to h = 8 \cdot \text{tg}\,70° \approx 21,98$ cm

Y, entonces, el área y el volumen son:

$A = \pi r^2 + \pi rg = \pi r \cdot (r + g) \approx \pi \cdot 8 \cdot (8 + 24) \approx 804,25 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \approx \dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot 21,98}{3} \approx 1473,11 \text{ cm}^3$

96 En el patio del Louvre hay una pirámide de cristal de base cuadrada. Sus caras laterales son triángulos equiláteros de 35 m de lado. El arquitecto dio a sus caras la misma inclinación que tienen las pirámides de Egipto, 51°.

a) ¿Cuánto mide la superficie acristalada?

b) ¿Cuál es su altura?

c) ¿Y su volumen?

a) La superficie acristalada es la suma de cuatro triángulos equiláteros de 35 m de lado. Su altura es:

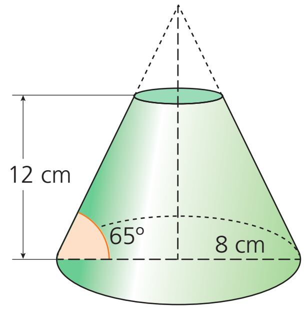
$$\text{sen}\,60° = \frac{h}{l} \to h = 35 \cdot \text{sen}\,60° \approx \frac{35\sqrt{3}}{2} \text{ m} \to A_{\text{acristalada}} = 4 \cdot \frac{35 \cdot \frac{35\sqrt{3}}{2}}{2} = 35^2\sqrt{3} \approx 2\,121,76 \text{ m}^2$$

b) La altura de la pirámide es: $\text{tg } 51° = \dfrac{H}{\dfrac{35}{2}} \rightarrow H = \dfrac{35}{2} \cdot \text{tg } 51° \approx 21,61 \text{ m}$

c) Y el volumen: $V = \dfrac{l^2 \cdot H}{3} \approx \dfrac{35^2 \cdot 21,61}{3} \approx 8\,824,08 \text{ m}^3$

97 Determina el volumen de este tronco de cono.

¿Es posible determinar su superficie? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcula su medida.



La altura de ambos conos es: $\text{tg } 65° = \dfrac{H}{8} \rightarrow H = 8 \cdot \text{tg } 65° \approx 17,16 \text{ cm} \rightarrow h = 17,16 - 12 = 5,16 \text{ cm}$

Y el radio menor: $\text{tg } 65° = \dfrac{5,16}{r} \rightarrow r = \dfrac{5,16}{\text{tg } 65°} \approx 2,41 \text{ cm}$

Así el volumen: $V = V_1 - V_2 = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \dfrac{\pi \cdot (8^2 \cdot 17,16 - 2,41^2 \cdot 5,16)}{3} \approx 1118,69 \text{ cm}^3$

Para el área determinamos las generatrices de los conos:

$\cos 65° = \dfrac{8}{G} \rightarrow G = \dfrac{8}{\cos 65°} \approx 18,93 \text{ cm} \rightarrow \cos 65° = \dfrac{2,41}{g} \rightarrow g = \dfrac{2,41}{\cos 65°} \approx 5,70 \text{ cm}$

$A = (\pi R^2 + \pi r^2) + (\pi RG - \pi rg) \approx (\pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 2,41^2) + (\pi \cdot 8 \cdot 18,93 - \pi \cdot 2,41 \cdot 5,70) \approx 651,92 \text{ cm}^2$

Desafío

98 La clase de Caridad ha salido con el profesor de Biología para hacer una ruta por una zona boscosa y conocer su flora y su fauna. A fin de orientarse llevan una brújula y anotan en cada momento qué dirección toman.

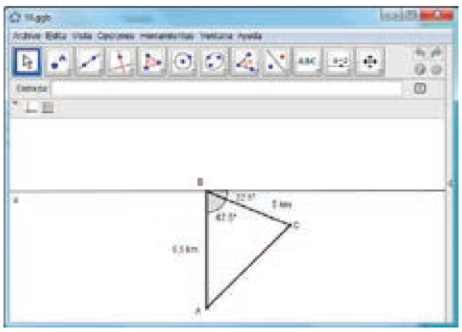
La ruta comienza en dirección norte. A los 6,5 km de marcha giran en dirección este-sur-este (ESE). Mantienen este rumbo durante 5 km hasta que deciden volver al punto de partida donde tienen que coger el transporte de vuelta al centro escolar.

a) Haz un esquema de la ruta completa y coloca los datos en ella. Ten en cuenta los ángulos.

b) ¿Qué dirección deben tomar mirando la brújula?

c) ¿Cuántos kilómetros tiene el recorrido completo?

a) Con una herramienta como GeoGebra podemos trazar la ruta y tenemos:



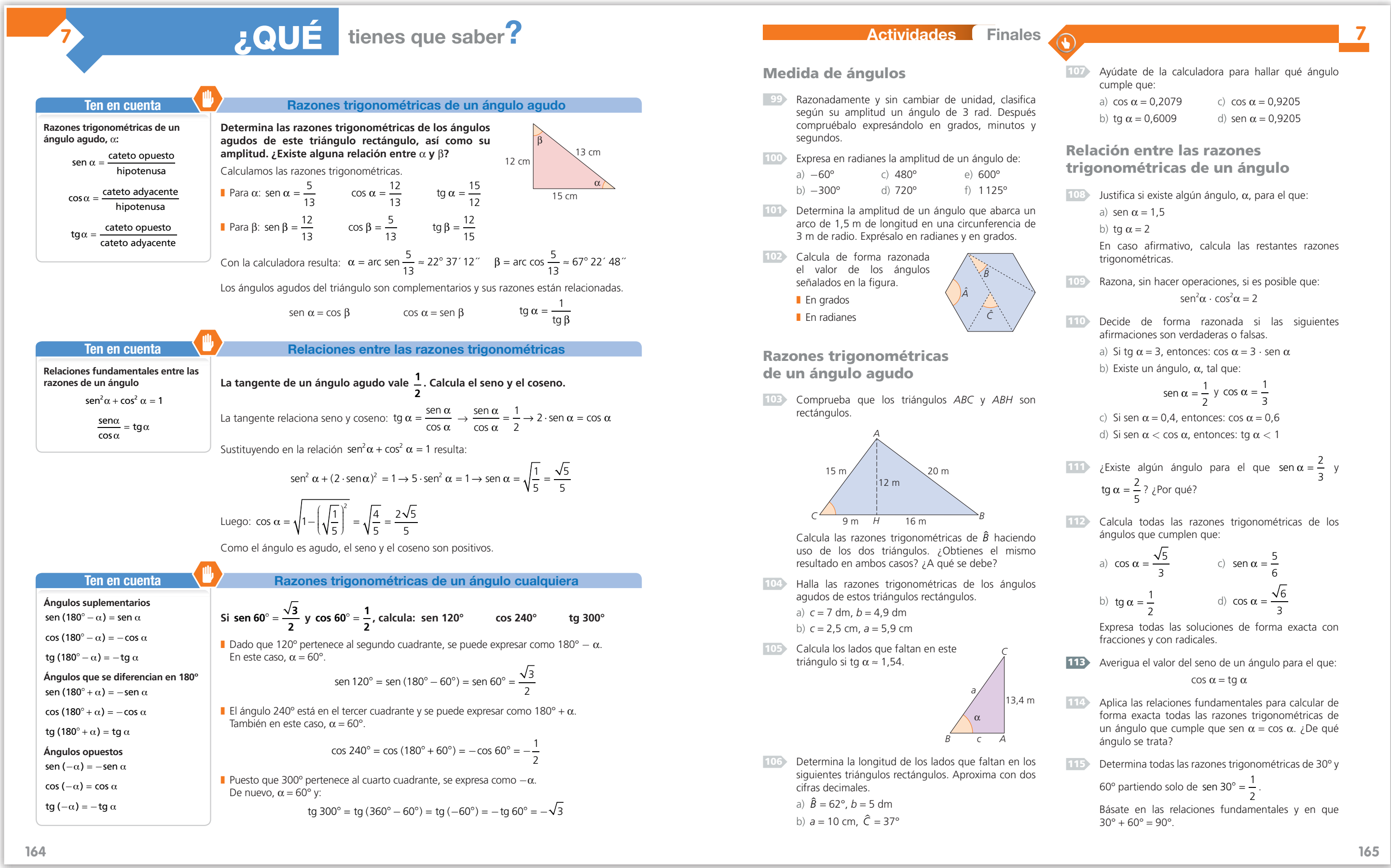
b) Para volver, mirando la brújula deben ir dirección Sur-Oeste-Sur.

c) Determinamos la longitud del lado que falta aplicando el teorema del coseno:

$$b = \sqrt{5^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6,5 \cdot \cos 67,5°} \approx 6,5 \text{ km}$$

El recorrido total es de 5 + 6,5 + 6,5 = 18 km.

¿Qué tienes que saber?



7 ¿QUÉ tienes que saber?

Ten en cuenta

Razones trigonométricas de un ángulo agudo, α:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Determina las razones trigonométricas de los ángulos agudos de este triángulo rectángulo, así como su amplitud. ¿Existe alguna relación entre α y β?

12 cm, 13 cm, 15 cm

Calculamos las razones trigonométricas.

- Para α: $\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{13}$ $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ $\text{tg}\ \alpha = \frac{15}{12}$
- Para β: $\text{sen}\ \beta = \frac{12}{13}$ $\cos \beta = \frac{5}{13}$ $\text{tg}\ \beta = \frac{12}{15}$

Con la calculadora resulta: $\alpha = \text{arc sen}\ \frac{5}{13} \approx 22°\ 37'\ 12''$ $\beta = \text{arc cos}\ \frac{5}{13} \approx 67°\ 22'\ 48''$

Los ángulos agudos del triángulo son complementarios y sus razones están relacionadas.

$$\text{sen}\ \alpha = \cos \beta \qquad \cos \alpha = \text{sen}\ \beta \qquad \text{tg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \beta}$$

Ten en cuenta

Relaciones fundamentales entre las razones de un ángulo

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\ \alpha$$

Relaciones entre las razones trigonométricas

La tangente de un ángulo agudo vale $\frac{1}{2}$. Calcula el seno y el coseno.

La tangente relaciona seno y coseno: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \text{sen}\ \alpha = \cos \alpha$

Sustituyendo en la relación $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ resulta:

$$\text{sen}^2 \alpha + (2 \cdot \text{sen}\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 5 \cdot \text{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Luego: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Como el ángulo es agudo, el seno y el coseno son positivos.

Ten en cuenta

Ángulos suplementarios

$\text{sen}\ (180° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$

$\cos\ (180° - \alpha) = -\cos \alpha$

$\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$

Ángulos que se diferencian en 180°

$\text{sen}\ (180° + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$

$\cos\ (180° + \alpha) = -\cos \alpha$

$\text{tg}\ (180° + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$

Ángulos opuestos

$\text{sen}\ (-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$

$\cos\ (-\alpha) = \cos \alpha$

$\text{tg}\ (-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Si $\text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos 60° = \frac{1}{2}$, calcula: sen 120° cos 240° tg 300°

- Dado que 120° pertenece al segundo cuadrante, se puede expresar como 180° − α. En este caso, α = 60°.

$$\text{sen}\ 120° = \text{sen}\ (180° - 60°) = \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- El ángulo 240° está en el tercer cuadrante y se puede expresar como 180° + α. También en este caso, α = 60°.

$$\cos 240° = \cos (180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

- Puesto que 300° pertenece al cuarto cuadrante, se expresa como −α. De nuevo, α = 60° y:

$$\text{tg}\ 300° = \text{tg}\ (360° - 60°) = \text{tg}\ (-60°) = -\text{tg}\ 60° = -\sqrt{3}$$

164

Actividades Finales 7

Medida de ángulos

99 Razonadamente y sin cambiar de unidad, clasifica según su amplitud un ángulo de 3 rad. Después compruébalo expresándolo en grados, minutos y segundos.

100 Expresa en radianes la amplitud de un ángulo de:
a) −60° c) 480° e) 600°
b) −300° d) 720° f) 1 125°

101 Determina la amplitud de un ángulo que abarca un arco de 1,5 m de longitud en una circunferencia de 3 m de radio. Exprésalo en radianes y en grados.

102 Calcula de forma razonada el valor de los ángulos señalados en la figura.
- En grados
- En radianes

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

103 Comprueba que los triángulos *ABC* y *ABH* son rectángulos.

Calcula las razones trigonométricas de $\hat{B}$ haciendo uso de los dos triángulos. ¿Obtienes el mismo resultado en ambos casos? ¿A qué se debe?

104 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos rectángulos.
a) $c = 7$ dm, $b = 4{,}9$ dm
b) $c = 2{,}5$ cm, $a = 5{,}9$ cm

105 Calcula los lados que faltan en este triángulo si $\text{tg}\ \alpha \approx 1{,}54$.

106 Determina la longitud de los lados que faltan en los siguientes triángulos rectángulos. Aproxima con dos cifras decimales.
a) $\hat{B} = 62°$, $b = 5$ dm
b) $a = 10$ cm, $\hat{C} = 37°$

107 Ayúdate de la calculadora para hallar qué ángulo cumple que:
a) $\cos \alpha = 0{,}2079$ c) $\cos \alpha = 0{,}9205$
b) $\text{tg}\ \alpha = 0{,}6009$ d) $\text{sen}\ \alpha = 0{,}9205$

Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo

108 Justifica si existe algún ángulo, α, para el que:
a) $\text{sen}\ \alpha = 1{,}5$
b) $\text{tg}\ \alpha = 2$
En caso afirmativo, calcula las restantes razones trigonométricas.

109 Razona, sin hacer operaciones, si es posible que:
$$\text{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 2$$

110 Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) Si $\text{tg}\ \alpha = 3$, entonces: $\cos \alpha = 3 \cdot \text{sen}\ \alpha$
b) Existe un ángulo, α, tal que:
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2} \text{ y } \cos \alpha = \frac{1}{3}$$
c) Si $\text{sen}\ \alpha = 0{,}4$, entonces: $\cos \alpha = 0{,}6$
d) Si $\text{sen}\ \alpha < \cos \alpha$, entonces: $\text{tg}\ \alpha < 1$

111 ¿Existe algún ángulo para el que $\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{3}$ y $\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{5}$? ¿Por qué?

112 Calcula todas las razones trigonométricas de los ángulos que cumplen que:
a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{6}$
b) $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2}$ d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Expresa todas las soluciones de forma exacta con fracciones y con radicales.

113 Averigua el valor del seno de un ángulo para el que:
$$\cos \alpha = \text{tg}\ \alpha$$

114 Aplica las relaciones fundamentales para calcular de forma exacta todas las razones trigonométricas de un ángulo que cumple que $\text{sen}\ \alpha = \cos \alpha$. ¿De qué ángulo se trata?

115 Determina todas las razones trigonométricas de 30° y 60° partiendo solo de $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$.
Básate en las relaciones fundamentales y en que 30° + 60° = 90°.

165

Sugerencias didácticas

En esta sección se destacan los procedimientos más importantes que los alumnos deben haber aprendido tras estudiar esta unidad. En este momento, los alumnos deben ser capaces de:

- Reconocer las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Aplicar las relaciones entre las razones trigonométricas.
- Extender las razones trigonométricas a un ángulo cualquiera.
- Resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Actividades finales

Soluciones de las actividades

99 Razonadamente y sin cambiar de unidad, clasifica según su amplitud un ángulo de 3 rad. Después compruébalo expresándolo en grados, minutos y segundos.

Un ángulo de 3 rad, algo menor que π, es un ángulo obtuso: $3 \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180}{\pi} \approx 171°\ 53'\ 14{,}42''$

100 Expresa en radianes la amplitud de un ángulo de:

a) −60° b) −300° c) 480° d) 720° e) 600° f) 1 125°

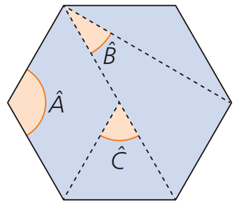
a) $-60° = \frac{-60° \cdot \pi}{180°} = -\frac{\pi}{3}$ c) $480° = \frac{480° \cdot \pi}{180°} = \frac{8\pi}{3}$ e) $600° = \frac{600° \cdot \pi}{180°} = \frac{10\pi}{3}$

b) $-300° = \frac{-300° \cdot \pi}{180°} = -\frac{5\pi}{3}$ d) $720° = \frac{720° \cdot \pi}{180°} = 4\pi$ f) $1125° = \frac{1125° \cdot \pi}{180°} = \frac{25\pi}{4}$

101 Determina la amplitud de un ángulo que abarca un arco de 1,5 m de longitud en una circunferencia de 3 m de radio. Exprésalo en radianes y en grados.

Despejando de la fórmula obtenida en el ejercicio 12: $\text{amplitud (rad)} = \frac{L_{arco}}{r} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2} \text{ rad} = 28°\ 38'\ 52{,}4''$

102 Calcula de forma razonada el valor de los ángulos señalados en la figura.



- En grados
- En radianes

El ángulo $\hat{C}$ es el ángulo central de un hexágono regular:

$$\hat{C} = \frac{360°}{6} = 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

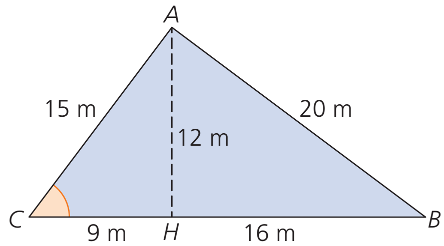
Y $\hat{A}$ es el ángulo interior, suma de los dos ángulos iguales del triángulo central, suplementario de $\hat{C}$.

$$\hat{A} = 180° - 60° = 120° = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Por otro lado: $\hat{B} = \dfrac{120°}{2} = 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad

103 Comprueba que los triángulos *ABC* y *ABH* son rectángulos.

Calcula las razones trigonométricas de $\hat{B}$ haciendo uso de los dos triángulos. ¿Obtienes el mismo resultado en ambos casos? ¿A qué se debe?



Si sus lados verifican el teorema de Pitágoras podemos afirmar que son rectángulos. Y ambos lo son:

$$ABC \rightarrow 15^2 + 20^2 = (9+16)^2 \rightarrow 225 + 400 = 625$$
$$ABH \rightarrow 12^2 + 16^2 = 20^2 \rightarrow 144 + 256 = 400$$

Si calculamos las razones trigonométricas de $\hat{B}$ a partir de *ABC*:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{15}{25} = 0{,}6 \qquad \cos \hat{B} = \frac{20}{25} = 0{,}8 \qquad \text{tg } \hat{B} = \frac{15}{20} = 0{,}75$$

Y a partir de *ABH*: $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{12}{20} = 0{,}6 \qquad \cos \hat{B} = \dfrac{16}{20} = 0{,}8 \qquad \text{tg } \hat{B} = \dfrac{12}{16} = 0{,}75$

En ambos casos obtenemos el resultado porque la razón no depende del tamaño del triángulo elegido si no del valor del ángulo. Y como los triángulos son semejantes sus ángulos miden lo mismo.

104 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos rectángulos.

a) $c = 7$ dm, $b = 4{,}9$ dm **b)** $c = 2{,}5$ cm, $a = 5{,}9$ cm

a) Determinamos la longitud de la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{7^2 + 4{,}9^2} \approx 8{,}5$ dm

Así las razones de sus ángulos son:

$$\hat{B} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \approx \frac{4{,}9}{8{,}5} = 0{,}5764... \qquad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} \approx \frac{7}{8{,}5} = 0{,}8235... \qquad \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{4{,}9}{7} = 0{,}7$$

$$\hat{C} \rightarrow \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a} \approx \frac{7}{8{,}5} = 0{,}8235... \qquad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} \approx \frac{4{,}9}{8{,}5} = 0{,}5764... \qquad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{7}{4{,}9} = 1{,}4285...$$

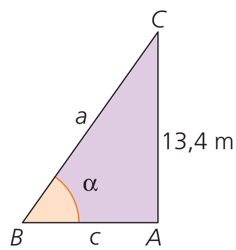
b) Determinamos la longitud del cateto que falta aplicando el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{5{,}9^2 - 2{,}5^2} \approx 5{,}3$ cm

Así las razones de sus ángulos son:

$$\hat{B} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \approx \frac{5{,}3}{5{,}9} = 0{,}8983... \qquad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{2{,}5}{5{,}9} = 0{,}4237... \qquad \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \approx \frac{5{,}3}{2{,}5} = 2{,}12$$

$$\hat{C} \rightarrow \text{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{2{,}5}{5{,}9} = 0{,}4237... \qquad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} \approx \frac{5{,}3}{5{,}9} = 0{,}8983... \qquad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} = \approx \frac{2{,}5}{5{,}3} = 0{,}4716...$$

105 Calcula los lados que faltan en este triángulo si tg $\alpha \approx 1{,}54$.



A partir de la tangente hallamos el valor de cateto c y con él, el de la hipotenusa aplicando Pitágoras.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \rightarrow \frac{13{,}4}{c} = 1{,}54 \rightarrow c \approx 8{,}7 \text{ m}$$

$$\text{Hipotenusa} \approx \sqrt{13{,}4^2 + 8{,}7^2} \approx 16{,}0 \text{ m}$$

106 Determina la longitud de los lados que faltan en los siguientes triángulos rectángulos. Aproxima con dos cifras decimales.

a) $\hat{B} = 62°$, $b = 5$ dm

b) $a = 10$ cm, $\hat{C} = 37°$

a) Podemos determinar los lados que faltan con las razones en las que está involucrado el cateto opuesto:

$$\text{sen } 62° = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{\text{sen } 62°} \approx 5{,}66 \text{ dm} \qquad \text{tg } 62° = \frac{5}{c} \rightarrow c = \frac{5}{\text{tg } 62°} \approx 2{,}66 \text{ dm}$$

b) Podemos determinar los lados que faltan con las razones en las que está involucrada la hipotenusa:

$$\text{sen } 37° = \frac{c}{10} \rightarrow c = 10 \cdot \text{sen } 37° \approx 6{,}02 \text{ cm} \qquad \cos 37° = \frac{b}{10} \rightarrow b = 10 \cdot \cos 37° \approx 7{,}99 \text{ cm}$$

107 Ayúdate de la calculadora para hallar qué ángulo cumple que:

a) $\cos\alpha = 0{,}2079$

b) $\text{tg } \alpha = 0{,}6009$

c) $\cos\alpha = 0{,}9205$

d) $\text{sen } \alpha = 0{,}9205$

a) $\text{arc cos } 0{,}2079 \approx 78°$

b) $\text{arc tg } 0{,}6009 \approx 31°$

c) $\text{arc cos } 0{,}9205 \approx 23°$

d) $\text{arc sen } 0{,}9205 \approx 67°$

108 Justifica si existe algún ángulo, α, para el que:

a) $\text{sen } \alpha = 1{,}5$

b) $\text{tg } \alpha = 2$

En caso afirmativo, calcula las restantes razones trigonométricas.

a) No, el valor del seno nunca es mayor que 1.

b) Sí existe. Y sus razones son: $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow 2 = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \text{sen } \alpha = 2 \cdot \cos\alpha$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 2^2 \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 5 \cdot \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \text{sen } \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

109 Razona, sin hacer operaciones, si es posible que: $\text{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2$

No, las dos razones son números menores que 1 y así serán también sus cuadrados. Si multiplicamos dos números menores que uno su producto no puede ser 2.

110 Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $\text{tg } \alpha = 3$, entonces: $\cos\alpha = 3 \cdot \text{sen } \alpha$

b) Existe un ángulo, α, tal que: $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$ y $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

c) Si $\text{sen } \alpha = 0{,}4$, entonces: $\cos\alpha = 0{,}6$

d) Si $\text{sen } \alpha < \cos\alpha$, entonces: $\text{tg } \alpha < 1$

a) Falsa. Sería al revés: $\text{tg } \alpha = 3 \rightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = 3 \rightarrow \text{sen } \alpha = 3 \cdot \cos\alpha$

b) Falsa. Se debería cumplir $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y sin embargo: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} \neq 1$

c) Falsa. $\text{sen } \alpha = 0{,}4 \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}4^2} = \sqrt{0{,}84} \neq 0{,}6$

d) Verdadera. Si $\text{sen } \alpha < \cos\alpha \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} < 1$, pues el numerador es menor que el denominador.

111 ¿Existe algún ángulo para el que $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$ y $\text{tg } \alpha = \frac{2}{5}$? ¿Por qué?

No existe un valor para el coseno menor que uno, que verifique la relación con la tangente y el seno.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{2/3}{\cos\alpha} \rightarrow \cos\alpha = \frac{5 \cdot 2/3}{2} = \frac{5}{3} > 1$$

112 Calcula todas las razones trigonométricas de los ángulos que cumplen que:

a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$

c) $\text{sen } \alpha = \frac{5}{6}$

d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Expresa todas las soluciones de forma exacta con fracciones y con radicales.

a) $\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \to \dfrac{1}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \to 2\cdot\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha + 2^2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \to 5\cdot\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \to \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{11}{36}} = \dfrac{\sqrt{11}}{6} \to \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{5/6}{\sqrt{11}/6} = \dfrac{5\sqrt{11}}{11}$

d) $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \to \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{6}/3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

113 Averigua el valor del seno de un ángulo para el que: $\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$

Si $\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha \to \cos\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \to \cos^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha$, y entonces:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 1 = 0 \to \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1, \text{ no válida} \end{cases}$$

Solo es válida la solución positiva.

114 Aplica las relaciones fundamentales para calcular de forma exacta todas las razones trigonométricas de un ángulo que cumple que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$. ¿De qué ángulo se trata?

Si $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 1$:

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \to 2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \to \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha$

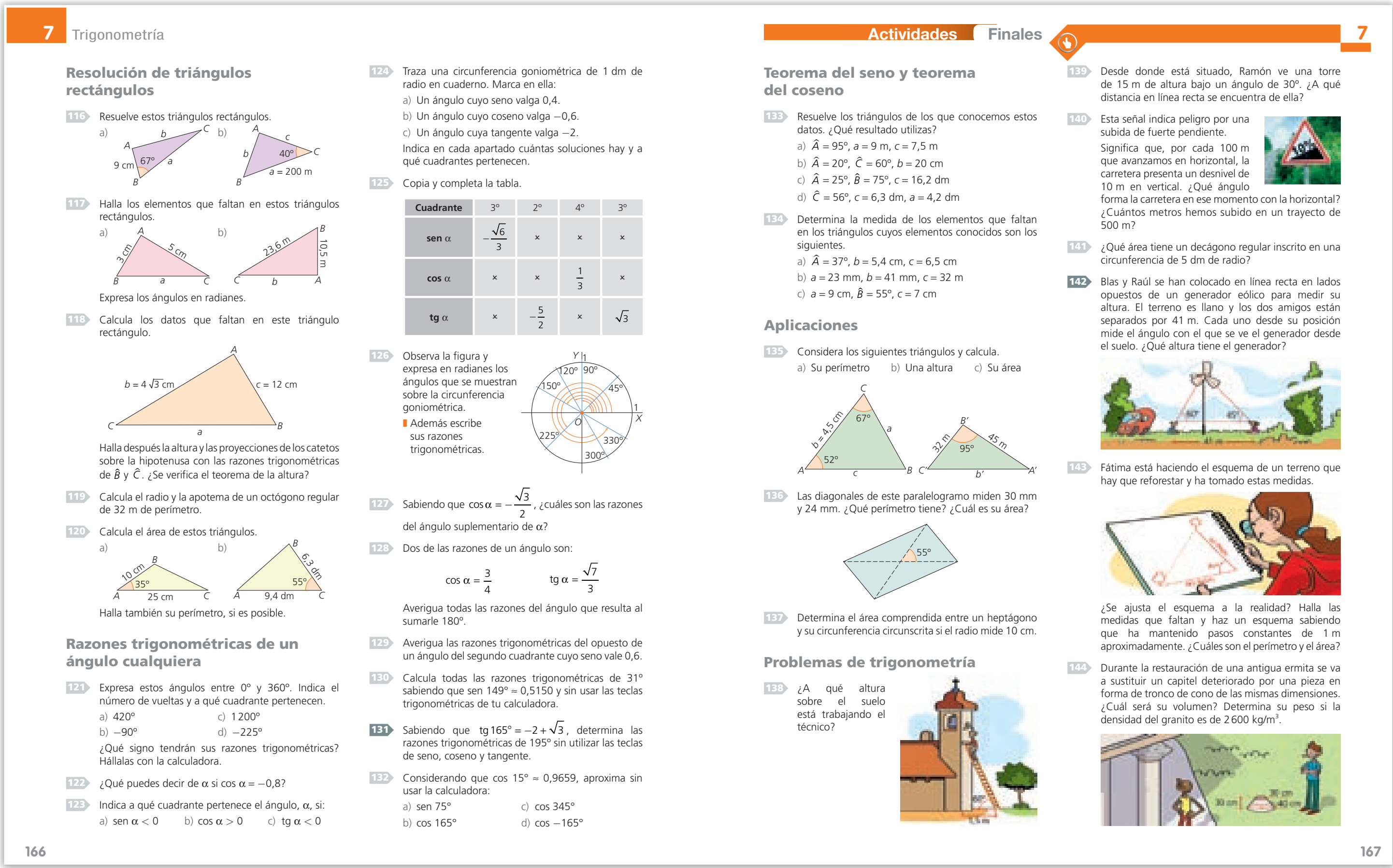
Se trata del ángulo $\dfrac{\pi}{4} = 45°$.

115 Determina todas las razones trigonométricas de 30° y 60° partiendo solo de $\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2}$. Básate en las relaciones fundamentales y en que $30° + 60° = 90°$.

Si $\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2}$: $\cos 30° = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 30°} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to \operatorname{tg}30° = \dfrac{\operatorname{sen}30°}{\cos 30°} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Como 30° y 60° son complementarios, verifican que:

$\operatorname{sen}60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos 60° = \operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \operatorname{tg}60° = \operatorname{cotg}30° = \dfrac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$



7 Trigonometría

Resolución de triángulos rectángulos

116 Resuelve estos triángulos rectángulos.

117 Halla los elementos que faltan en estos triángulos rectángulos.

Expresa los ángulos en radianes.

118 Calcula los datos que faltan en este triángulo rectángulo.

Halla después la altura y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa con las razones trigonométricas de $\hat{B}$ y $\hat{C}$. ¿Se verifica el teorema de la altura?

119 Calcula el radio y la apotema de un octógono regular de 32 m de perímetro.

120 Calcula el área de estos triángulos.

Halla también su perímetro, si es posible.

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

121 Expresa estos ángulos entre 0° y 360°. Indica el número de vueltas y a qué cuadrante pertenecen.

a) 420° c) 1 200°

b) −90° d) −225°

¿Qué signo tendrán sus razones trigonométricas? Hállalas con la calculadora.

122 ¿Qué puedes decir de α si $\cos\alpha = -0,8$?

123 Indica a qué cuadrante pertenece el ángulo, α, si:

a) $\text{sen}\,\alpha < 0$ b) $\cos\alpha > 0$ c) $\text{tg}\,\alpha < 0$

124 Traza una circunferencia goniométrica de 1 dm de radio en cuaderno. Marca en ella:

a) Un ángulo cuyo seno valga 0,4.

b) Un ángulo cuyo coseno valga −0,6.

c) Un ángulo cuya tangente valga −2.

Indica en cada apartado cuántas soluciones hay y a qué cuadrantes pertenecen.

125 Copia y completa la tabla.

Cuadrante	3°	2°	4°	3°
sen α	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	×	×	×
cos α	×	×	$\frac{1}{3}$	×
tg α	×	$-\frac{5}{2}$	×	$\sqrt{3}$

126 Observa la figura y expresa en radianes los ángulos que se muestran sobre la circunferencia goniométrica.

Además escribe sus razones trigonométricas.

127 Sabiendo que $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿cuáles son las razones del ángulo suplementario de α?

128 Dos de las razones de un ángulo son:

$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Averigua todas las razones del ángulo que resulta al sumarle 180°.

129 Averigua las razones trigonométricas del opuesto de un ángulo del segundo cuadrante cuyo seno vale 0,6.

130 Calcula todas las razones trigonométricas de 31° sabiendo que sen 149° = 0,5150 y sin usar las teclas trigonométricas de tu calculadora.

131 Sabiendo que $\text{tg}\,165° = -2 + \sqrt{3}$, determina las razones trigonométricas de 195° sin utilizar las teclas de seno, coseno y tangente.

132 Considerando que cos 15° ≈ 0,9659, aproxima sin usar la calculadora:

a) sen 75° c) cos 345°

b) cos 165° d) cos −165°

166

Actividades Finales 7

Teorema del seno y teorema del coseno

133 Resuelve los triángulos de los que conocemos estos datos. ¿Qué resultado utilizas?

a) $\hat{A} = 95°$, $a = 9$ m, $c = 7,5$ m

b) $\hat{A} = 20°$, $\hat{C} = 60°$, $b = 20$ cm

c) $\hat{A} = 25°$, $\hat{B} = 75°$, $c = 16,2$ dm

d) $\hat{C} = 56°$, $c = 6,3$ dm, $a = 4,2$ dm

134 Determina la medida de los elementos que faltan en los triángulos cuyos elementos conocidos son los siguientes.

a) $\hat{A} = 37°$, $b = 5,4$ cm, $c = 6,5$ cm

b) $a = 23$ mm, $b = 41$ mm, $c = 32$ m

c) $a = 9$ cm, $\hat{B} = 55°$, $c = 7$ cm

Aplicaciones

135 Considera los siguientes triángulos y calcula.

a) Su perímetro b) Una altura c) Su área

136 Las diagonales de este paralelogramo miden 30 mm y 24 mm. ¿Qué perímetro tiene? ¿Cuál es su área?

137 Determina el área comprendida entre un heptágono y su circunferencia circunscrita si el radio mide 10 cm.

Problemas de trigonometría

138 ¿A qué altura sobre el suelo está trabajando el técnico?

139 Desde donde está situado, Ramón ve una torre de 15 m de altura bajo un ángulo de 30°. ¿A qué distancia en línea recta se encuentra de ella?

140 Esta señal indica peligro por una subida de fuerte pendiente.

Significa que, por cada 100 m que avanzamos en horizontal, la carretera presenta un desnivel de 10 m en vertical. ¿Qué ángulo forma la carretera en ese momento con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos subido en un trayecto de 500 m?

141 ¿Qué área tiene un decágono regular inscrito en una circunferencia de 5 dm de radio?

142 Blas y Raúl se han colocado en línea recta en lados opuestos de un generador eólico para medir su altura. El terreno es llano y los dos amigos están separados por 41 m. Cada uno desde su posición mide el ángulo con el que se ve el generador desde el suelo. ¿Qué altura tiene el generador?

143 Fátima está haciendo el esquema de un terreno que hay que reforestar y ha tomado estas medidas.

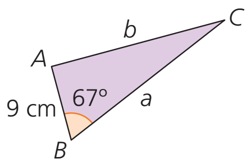
¿Se ajusta el esquema a la realidad? Halla las medidas que faltan y haz un esquema sabiendo que ha mantenido pasos constantes de 1 m aproximadamente. ¿Cuáles son el perímetro y el área?

144 Durante la restauración de una antigua ermita se va a sustituir un capitel deteriorado por una pieza en forma de tronco de cono de las mismas dimensiones. ¿Cuál será su volumen? Determina su peso si la densidad del granito es de 2 600 kg/m³.

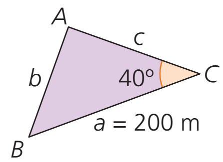
167

116 Resuelve estos triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $\hat{A} = 90°, \hat{B} = 67°, \hat{C} = 90° - 67° = 23°$

$\text{tg}\,67° = \dfrac{b}{c} \to \text{tg}\,67° = \dfrac{b}{9} \to b = 9 \cdot \text{tg}\,67° \approx 21,20 \text{ cm}$

$\cos 67° = \dfrac{c}{a} \to \cos 67° = \dfrac{9}{a} \to a = \dfrac{9}{\cos 67°} \approx 23,03 \text{ cm}$

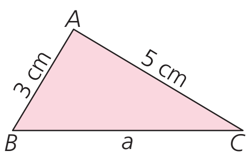
b) $\hat{A} = 90°, \hat{C} = 40°, \hat{B} = 90° - 40° = 50°$

$\text{sen}\,40° = \dfrac{c}{a} \to \text{sen}\,40° = \dfrac{c}{200} \to c = 200 \cdot \text{sen}\,40° \approx 128,56 \text{ m}$

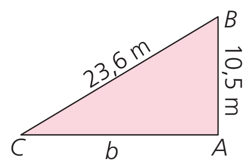
$\cos 40° = \dfrac{b}{a} \to \cos 40° = \dfrac{b}{200} \to b = 200 \cdot \cos 40° \approx 153,21 \text{ m}$

117 Halla los elementos que faltan en estos triángulos rectángulos.

a)



b)



Expresa los ángulos en radianes.

a) Hallamos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ a través de sus tangentes:

$\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b}{c} \to \hat{B} = \text{arc tg}\,\dfrac{5}{3} = 59°\,2'\,10,48'' = 1,0304 \text{ rad}$ $\quad \text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{c}{b} \to \hat{C} = \text{arc tg}\,\dfrac{3}{5} = 30°\,57'\,49,52'' = 0,5402 \text{ rad}$

Y a aplicando el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5,83 \text{ cm}$

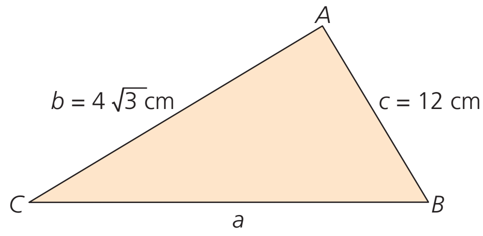
b) Hallamos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ a través de sus razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow \hat{C} = \operatorname{arc\,sen} \frac{10,5}{23,6} = 26°\ 25'\ 4,5'' \qquad \cos \hat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow \hat{C} = \operatorname{arc\,cos} \frac{10,5}{23,6} = 63°\ 34'\ 55,5''$$

Y b aplicando el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{23,6^2 - 10,5^2} \approx 21,14$ m

118 Calcula los datos que faltan en este triángulo rectángulo.

Halla después la altura y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa con las razones trigonométricas de $\hat{B}$ y $\hat{C}$. ¿Se verifica el teorema de la altura?



Hallamos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ a través de sus tangentes:

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \hat{B} = \operatorname{arc\,tg} \frac{4\sqrt{3}}{12} = 30° \qquad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \rightarrow \hat{C} = \operatorname{arc\,tg} \frac{12}{4\sqrt{3}} = 60°$$

Y a aplicando el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 12^2} = \sqrt{162} \approx 13,86$ cm

Hallamos las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, aplicando el coseno.

$$\cos \hat{B} = \frac{m}{c} \rightarrow m = c \cdot \cos \hat{B} = 12 \cdot \cos 30° = 6\sqrt{3}\ \text{cm} \qquad \cos \hat{C} = \frac{n}{b} \rightarrow n = b \cdot \cos \hat{C} = 4\sqrt{3} \cdot \cos 60° = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Y la altura con el seno de cualquiera de los dos: $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = 12 \cdot \operatorname{sen} 30° = 6$ cm

Y verifican el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n \rightarrow 6^2 = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

119 Calcula el radio y la apotema de un octógono regular de 32 m de perímetro.

El ángulo central de un octógono regular mide: $\frac{360°}{8} = 45°$

Cada uno de los triángulos que se forman es isósceles y los ángulos iguales miden: $\frac{180° - 45°}{2} = 67,5°$

La altura de ese triángulo lo divide en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el radio y los catetos la altura y la mitad del lado. Para este triángulo: $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 67,5°$, $\hat{C} = 90° - 67,5° = 22,5°$ y lado $= \frac{32}{8} = 4$ m $\rightarrow c = \frac{4}{2} = 2$ m

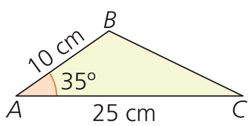
Calculamos el radio y la apotema utilizando las razones de 22,5°:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow \operatorname{sen} 22,5° = \frac{2}{a} \rightarrow a = \frac{2}{\operatorname{sen} 22,5°} \approx 5,23\ \text{cm}\ \text{es la medida del radio}$$

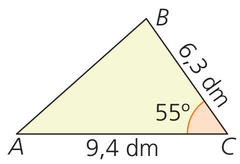
$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \rightarrow \operatorname{tg} 22,5° = \frac{2}{b} \rightarrow b = \frac{2}{\operatorname{tg} 22,5°} \approx 4,83\ \text{cm}\ \text{es la medida de la apotema}$$

120 Calcula el área de estos triángulos.

a)



b)



Halla también su perímetro, si es posible.

a) Calculamos la altura con el seno de 35°: $\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = 10 \cdot \operatorname{sen} 35° = 5,74$ cm

Y con ella el área: $A = \frac{b \cdot h}{2} \approx \frac{25 \cdot 5,74}{2} = 71,75\ \text{cm}^2$

Aplicando el teorema del coseno: $a = 17,76$ cm. Luego, el perímetro es: $10 + 25 + 17,76 = 52,76$ cm

b) Calculamos la altura con el seno de 55°: $\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = 6,3 \cdot \operatorname{sen} 55° \approx 5,16$ dm

Y con ella el área: $A = \frac{b \cdot h}{2} \approx \frac{9,4 \cdot 5,16}{2} \approx 24,25\ \text{dm}^2$

Aplicando el teorema del coseno: $c = 7,75$ dm. Luego, el perímetro es: $7,75 + 6,3 + 9,4 = 23,45$ dm

121 Expresa estos ángulos entre 0° y 360°. Indica el número de vueltas y a qué cuadrante pertenecen.

a) 420° **b)** −90° **c)** 1 200° **d)** −225°

¿Qué signo tendrán sus razones trigonométricas? Hállalas con la calculadora.

a) $420° = 1 \cdot 360° + 60° \rightarrow$ Primer cuadrante

$\text{sen } 420° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 420° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$ $\text{tg } 420° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

b) $-90° \rightarrow 360° - 90° = 270° \rightarrow$ Entre el tercer y el cuarto cuadrante

$\text{sen}(-90°) = \text{sen } 270° = -1$ $\cos(-90°) = \cos 270° = 0$ $\text{tg}(-90°) = \text{tg } 270° = \nexists$

c) $1200° = 3 \cdot 360° + 120° \rightarrow$ Segundo cuadrante

$\text{sen } 1\,200° = \text{sen } 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 1\,200° = \cos 120° = -\dfrac{1}{2}$ $\text{tg } 1\,200° = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$

d) $-225° \rightarrow 360° - 225° = 135° \rightarrow$ Segundo cuadrante

$\text{sen}(-225°)° = \text{sen } 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(-225°) = \cos 135° = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg}(-225°) = \text{tg } 135° = -1$

122 ¿Qué puedes decir de α si $\cos \alpha = -0{,}8$?

El ángulo pertenece al segundo o tercer cuadrante.

123 Indica a qué cuadrante pertenece el ángulo, α, si:

a) $\text{sen } \alpha < 0$ **b)** $\cos \alpha > 0$ **c)** $\text{tg } \alpha < 0$

a) El ángulo pertenece al tercer o cuarto cuadrante.

b) El ángulo pertence al primer o cuarto cuadrante.

c) El ángulo pertenece al segundo o cuarto cuadrante.

124 Traza una circunferencia goniométrica de 1 dm de radio en tu cuaderno. Marca en ella:

a) Un ángulo cuyo seno valga 0,4.

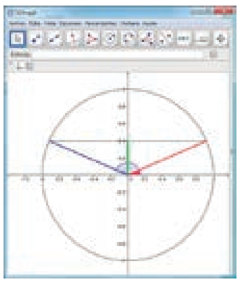
b) Un ángulo cuyo coseno valga −0,6.

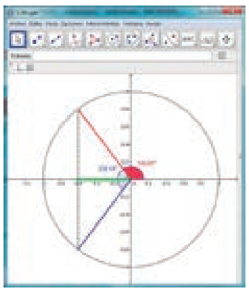
c) Un ángulo cuya tangente valga −2.

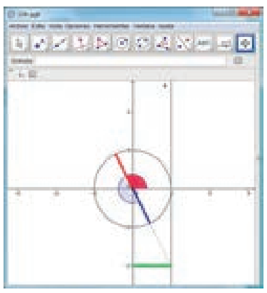
Indica en cada apartado cuántas soluciones hay y a qué cuadrantes pertenecen.

En todos los apartados hay dos soluciones.

a) Primero y segundo b) Segundo y tercero c) Segundo y cuarto



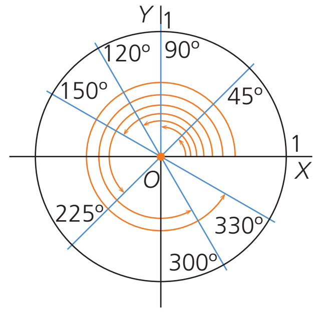




125 Copia y completa la tabla.

Cuadrante	3º	2º	4º	3º
sen α	$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$	$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$-\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$	$\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$
tg α	$\sqrt{2}$	$-\dfrac{5}{2}$	$-2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

126 Observa la figura y expresa en radianes los ángulos que se muestran sobre la circunferencia goniométrica.



▮ Además escribe sus razones trigonométricas.

(°)	45°	90°	120°	150°	225°	300°	330°
rad	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
sen α	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg α	1	∄	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

127 Sabiendo que $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿cuáles son las razones del ángulo suplementario de α?

Determinamos primero las razones de α sabiendo que si su coseno es negativo y tiene suplementario, pertenece al segundo cuadrante.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Y entonces las razones del suplementario son:

$$\text{sen}(180°-\alpha) = \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \qquad \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}(180°-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

128 Dos de las razones de un ángulo son: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ $\quad \text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Averigua todas las razones del ángulo que resulta al sumarle 180°.

Si el coseno y la tangente son positivos el ángulo α pertenece al primer cuadrante. Determinamos primero el seno aplicando la relación: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{3/4} \rightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \text{sen}\ \alpha$

Y entonces las razones del obtenido tras sumar 180° son:

$$\text{sen}(180°+\alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha = -\frac{3}{4} \qquad \text{tg}(180°+\alpha) = \text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

129 Averigua las razones trigonométricas del opuesto de un ángulo del segundo cuadrante cuyo seno vale 0,6.

Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría y teniendo en cuenta que α pertenece al segundo cuadrante:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8 \rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -0{,}75$$

Y entonces las razones de su opuesto son:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha = -0{,}6 \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha = -0{,}8 \qquad \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha = 0{,}75$$

130 Calcula todas las razones trigonométricas de 31° sabiendo que sen 149° ≈ 0,5150 y sin usar las teclas trigonométricas de tu calculadora.

Como $31° = 180° - 149°$ aplicamos la relación entre las razones de un ángulo y su suplementario.

Determinamos primero las razones de 149° sabiendo que pertenece al segundo cuadrante. Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\cos 149° = -\sqrt{1-\text{sen}^2 149°} = -\sqrt{1-0{,}5150^2} \approx -0{,}8572 \rightarrow \text{tg}\ 149° = \frac{\text{sen}\ 149°}{\cos 149°} = \frac{0{,}5150}{-0{,}8572} \approx -0{,}6008$$

Y entonces las razones del suplementario son:

$$\text{sen}\ 31° = \text{sen}\ 149° \approx 0{,}5150 \qquad \cos 31° = -\cos 149° \approx 0{,}8572 \qquad \text{tg}\ 31° = -\text{tg}\ 149° \approx 0{,}6008$$

131 Sabiendo que $\text{tg } 165° = -2+\sqrt{3}$, determina las razones trigonométricas de 195° sin utilizar las teclas de seno, coseno y tangente.

Como $195° = -165°$ aplicamos las razones de un ángulo y su opuesto. Hallamos primero las razones de 165° sabiendo que pertenece al segundo cuadrante. Aplicando las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \to -2+\sqrt{3} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \to \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \approx -0{,}2679 \to \text{sen } \alpha = -0{,}2679 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \to (-0{,}2679)^2 \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \to 1{,}0718 \cdot \cos^2 \alpha = 1 \qquad \cos \alpha \approx -\sqrt{\frac{1}{1{,}0718}} \approx -0{,}9659$$

Y, por tanto: $\text{sen } \alpha \approx -0{,}2679 \cdot (-0{,}9659) \approx 0{,}2588$

Y entonces las razones de su opuesto son:

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha \approx -0{,}2500 \qquad \cos (-\alpha) = \cos \alpha \approx -0{,}9659 \qquad \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha = 2-\sqrt{3}$$

132 Considerando que $\cos 15° \approx 0{,}9659$, aproxima sin usar la calculadora:

a) sen 75° **b)** cos 165° **c)** cos 345° **d)** cos −165°

a) $\text{sen } 75° = \text{sen } (90° - 15°) = \text{sen } 15° \approx 0{,}2589$

b) $\cos 165° = \cos (180° - 15°) = -\cos 15° \approx -0{,}9659$

c) $\cos 345° = \cos (-15°) = \cos 15° \approx 0{,}9659$

d) $\cos (-165°) = \cos (195°) = \cos (180° + 15°) = -\cos (15°) \approx -0{,}9659$

133 Resuelve los triángulos de los que conocemos estos datos. ¿Qué resultado utilizas?

a) $\hat{A} = 95°$, $a = 9$ m, $c = 7{,}5$ m

b) $\hat{A} = 20°$, $\hat{C} = 60°$, $b = 20$ cm

c) $\hat{A} = 25°$, $\hat{B} = 75°$, $c = 16{,}2$ dm

d) $\hat{C} = 56°$, $c = 6{,}3$ dm, $a = 4{,}2$ dm

Todos estos triángulos se resuelven utilizando el teorema del seno.

a) $$\frac{\text{sen } 95°}{9} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{b} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{7{,}5} \to \hat{C} = \text{arc sen } \frac{7{,}5 \cdot \text{sen } 95°}{9} \approx 56° \ 6' \ 55''$$

$$\hat{B} = 180° - (95° + 56° \ 6' \ 55'') = 28° \ 53' \ 5'' \to b = \frac{9 \cdot \text{sen}(28° \ 53' \ 5'')}{\text{sen } 95°} \approx 4{,}36 \text{ m}$$

b) $$\hat{B} = 180° - (20° + 60°) = 100° \to \frac{\text{sen } 20°}{a} = \frac{\text{sen } 100°}{20} = \frac{\text{sen } 60°}{c} \to \begin{cases} a \approx 6{,}95 \text{ cm} \\ c \approx 17{,}59 \text{ cm} \end{cases}$$

c) $$\hat{C} = 180° - (25° + 75°) = 80° \to \frac{\text{sen } 25°}{a} = \frac{\text{sen } 75°}{b} = \frac{\text{sen } 80°}{16{,}2} \to \begin{cases} a \approx 6{,}95 \text{ dm} \\ b \approx 15{,}89 \text{ dm} \end{cases}$$

d) $$\frac{\text{sen } \hat{A}}{4{,}2} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{b} = \frac{\text{sen } 56°}{6{,}3} \to \hat{A} = \text{arc sen } \frac{4{,}2 \cdot \text{sen } 56°}{6{,}3} \approx 33° \ 33' \ 7''$$

$$\hat{B} = 180° - (56° + 33° \ 33' \ 7'') = 90° \ 26' \ 53'' \to b = \frac{6{,}3 \cdot \text{sen } (90° \ 26' \ 53'')}{\text{sen } 56°} \approx 7{,}60 \text{ dm}$$

134 Determina la medida de los elementos que faltan en los triángulos cuyos elementos conocidos son los siguientes.

a) $\hat{A} = 37°$, $b = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}5$ cm

b) $a = 23$ mm, $b = 41$ mm, $c = 32$ mm

c) $a = 9$ cm, $\hat{B} = 55°$, $c = 7$ cm

a) $$a = \sqrt{5{,}4^2 + 6{,}5^2 - 2 \cdot 5{,}4 \cdot 6{,}5 \cdot \cos 37°} \approx 3{,}92 \text{ cm}$$

$$\frac{\text{sen } 37°}{3{,}9} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{5{,}4} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{6{,}5} \to \hat{B} = \text{arc sen } \frac{5{,}4 \cdot \text{sen } 37°}{3{,}9} \approx 56° \ 26' \ 15''$$

$$\hat{C} = 180° - (37° + 56° \ 26' \ 15'') = 86° \ 33' \ 45''$$

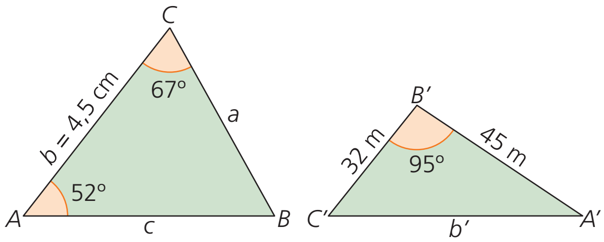
b) $$\hat{A} = \text{arc cos}\left(\frac{41^2 + 32^2 - 23^2}{2 \cdot 41 \cdot 32}\right) \approx 33° \ 58' \ 35'' \qquad \hat{B} = \text{arc cos}\left(\frac{23^2 + 32^2 - 41^2}{2 \cdot 23 \cdot 32}\right) \approx 94° \ 59' \ 19''$$

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 51° \ 2' \ 6''$$

c) $b = \sqrt{9^2 + 7^2 - 2\cdot 9\cdot 7\cdot \cos 55°} \approx 7{,}6$ cm $\hat{C} = 180° - (55° + 75°\ 56'\ 30'') = 49°\ 3'\ 30''$

$$\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{9} = \frac{\text{sen}\,55°}{7{,}6} = \frac{\text{sen}\,\hat{C}}{7} \to \hat{A} = \text{arc sen}\,\frac{9\cdot \text{sen}\,55°}{7{,}6} \approx 75°\ 56'\ 30''$$

135 Considera los siguientes triángulos y calcula.



a) Su perímetro   b) Una altura   c) Su área

- Determinamos a y b con el teorema del seno:

$$\hat{B} = 180° - (52° + 67°) = 61° \to \frac{\text{sen}\,52°}{a} = \frac{\text{sen}\,61°}{4{,}5} = \frac{\text{sen}\,67°}{c} \to \begin{cases} a \approx 4{,}05 \text{ cm} \\ c \approx 4{,}74 \text{ cm} \end{cases}$$

Así el perímetro es: $P = 4{,}05 + 4{,}5 + 4{,}74 = 13{,}29$ cm

La altura sobre c es: $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h_c}{b} \to \text{sen}\,52° = \frac{h_c}{4{,}5} \to h_c = 4{,}5\cdot \text{sen}\,52° \approx 3{,}55$ cm

Y el área: $A = \frac{c\cdot h_c}{2} = \frac{4{,}74\cdot 3{,}55}{2} \approx 8{,}41\ \text{cm}^2$

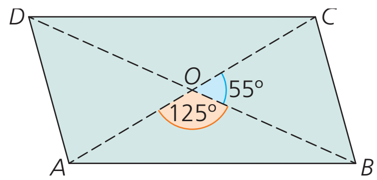
- Determinamos b' con el teorema del coseno: $b' = \sqrt{32^2 + 45^2 - 2\cdot 32\cdot 45\cdot \cos 95°} \approx 57{,}45$ m

Así el perímetro es: $P = 32 + 57{,}45 + 45 = 134{,}45$ m

La altura sobre a' es: $\text{sen}\,\hat{B}' = \frac{h_{a'}}{c'} \to \text{sen}\,95° = \frac{h_{a'}}{32} \to h_{a'} = 32\cdot \text{sen}\,95° \approx 31{,}88$ m

Y el área: $A = \frac{a'\cdot h_{a'}}{2} = \frac{32\cdot 31{,}88}{2} \approx 510{,}08\ \text{m}^2$

136 Las diagonales de este paralelogramo miden 30 mm y 24 mm. ¿Qué perímetro tiene? ¿Cuál es su área?



$\overline{AB} = 23{,}99$ mm $\overline{OB} = 15$ mm
$\overline{BC} = 12{,}75$ mm $\overline{OC} = 12$ mm

Los ángulos centrales miden: 55° y $180° - 55° = 125°$

Hallamos la longitud de sus lados aplicando el teorema del coseno a los triángulos *OAB* y *OBC* que forman las diagonales sabiendo que estas se cortan por su punto medio:

Lado mayor: $\overline{AB} = \sqrt{15^2 + 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12\cdot \cos 125°} \approx 23{,}99$ mm

Lado menor: $\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12\cdot \cos 55°} \approx 12{,}75$ mm

Luego el perímetro: $P \approx 2\cdot (23{,}99 + 12{,}75) = 73{,}48$ mm

Para determinar el área hallamos el ángulo en A con el teorema del coseno:

$$\hat{B} = \text{arc cos}\left(\frac{23{,}99^2 + 12{,}75^2 - 24^2}{2\cdot 23{,}99\cdot 12{,}75}\right) \approx 74{,}6°$$

Así la altura sobre el lado AB es: $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{h_{AB}}{BC} \to \text{sen}\,(74°\ 38'\ 9'') = \frac{h_a}{12{,}75} \to h_a = 12{,}75\cdot \text{sen}\,(74°\ 38'\ 9'') \approx 12{,}29$ mm

Y el área: $A = \overline{AB}\cdot h_{AB} = 23{,}99\cdot 12{,}29 \approx 294{,}84\ \text{mm}^2$

137 Determina el área comprendida entre un heptágono y su circunferencia circunscrita si el radio mide 10 cm.

Necesitamos conocer la longitud del lado y la apotema. Los triángulos isósceles que se forman al trazar los radios tienen ángulos: $\hat{A} = \frac{360°}{7} \approx 51{,}4°$ y $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180° - \hat{A}}{2} = \frac{450}{7} \approx 64{,}3°$ y lados iguales $b = c = 10$ cm

Determinamos el lado a con el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{b} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{c} \to \frac{\text{sen } 51{,}4°}{a} = \frac{\text{sen } 64{,}3°}{10} \to a = \frac{10 \cdot \text{sen } 51{,}4°}{\text{sen } 64{,}3°} \approx 8{,}67 \text{ cm}$$

Y la altura sobre a: $\text{sen } \hat{B} = \frac{h_a}{c} \to \text{sen } 64{,}3° = \frac{h_a}{10} \to h_a = 10 \cdot \text{sen } 64{,}3° \approx 9{,}01 \text{ cm}$

La diferencia entre las áreas es: $A = \pi \cdot r^2 - \frac{P \cdot a}{2} \approx \pi \cdot 10^2 - \frac{7 \cdot 8{,}67 \cdot 9{,}01}{2} \approx 40{,}75 \text{ cm}^2$

138 ¿A qué altura sobre el suelo está trabajando el técnico?

La escalera forma con el suelo y el edificio un triángulo rectángulo. La altura y la distancia entre el edificio y el pie de la escalera son los catetos. Podemos determinar la altura utilizando la tangente de 60°:

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{1{,}5} \to h = 1{,}5 \cdot \text{tg } 60° = 1{,}5 \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}60 \text{ m}$$

El técnico trabaja a unos 2,60 m de altura.

139 Desde donde está situado, Ramón ve una torre de 15 m de altura bajo un ángulo de 30°. ¿A qué distancia en línea recta se encuentra de ella?

La torre forma con el suelo y la visual un triángulo rectángulo. La altura de la torre y la distancia a la que se encuentra Ramón son los catetos. Podemos determinar la altura utilizando la tangente de 30°.

$$\text{tg } 30° = \frac{15}{d} \to d = \frac{15}{\text{tg } 30°} = \frac{15}{\sqrt{3}/3} \approx 25{,}98 \text{ m}$$

Ramón se encuentra a unos 26 m de la torre.

140 Esta señal indica peligro por una subida de fuerte pendiente.

Significa que, por cada 100 m que avanzamos en horizontal, la carretera presenta un desnivel de 10 m en vertical. ¿Qué ángulo forma la carretera en ese momento con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos subido en un trayecto de 500 m?

El desplazamiento en vertical y en horizontal son los catetos de un triángulo rectángulo y determinan el valor de la tangente de ese ángulo.

$$\text{tg } \alpha = \frac{10}{100} \to \alpha = \text{arc tg } \frac{1}{10} \approx 5°\, 42'\, 38{,}14''$$

Si el trayecto es de 500 metros habrá subido 50 metros pues los triángulos son semejantes.

141 ¿Qué área tiene un decágono regular inscrito en una circunferencia de 5 dm de radio?

El ángulo central de un decágono regular mide: $\frac{360°}{10} = 36°$

Cada uno de los triángulos que se forman es isósceles y los ángulos iguales miden: $\frac{180° - 36°}{2} = 72°$

La altura lo divide en dos triángulos rectángulos de hipotenusa, el radio y catetos: la altura y la mitad del lado. En este triángulo: $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 72°$, $\hat{C} = 90° - 72° = 18°$ y la hipotenusa es igual al radio, $a = 5$ dm.

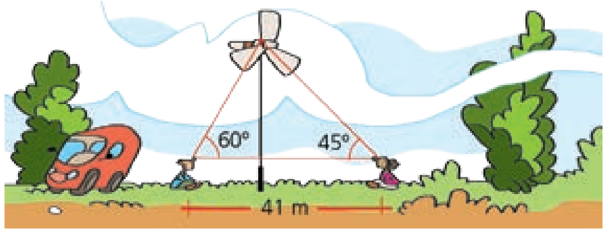
Calculamos la apotema y el lado utilizando las razones de 18°:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a} \to \text{sen } 18° = \frac{c}{5} \to c = 5 \cdot \text{sen } 18° \approx 1{,}55 \text{ dm} \text{ es la mitad del lado} \to l = 2 \cdot 1{,}55 = 3{,}10 \text{ dm}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \to \cos 18° = \frac{b}{5} \to b = 5 \cdot \cos 18° \approx 4{,}76 \text{ dm} \text{ es la medida de la apotema}$$

De ahí, el área es: $A = \frac{P \cdot a}{2} \approx \frac{10 \cdot 3{,}10 \cdot 4{,}76}{2} = 73{,}78 \text{ dm}^2$

142 Blas y Raúl se han colocado en línea recta en lados opuestos de un generador eólico para medir su altura. El terreno es llano y los dos amigos están separados por 41 m. Cada uno desde su posición mide el ángulo con el que se ve el generador desde el suelo. ¿Qué altura tiene el generador?



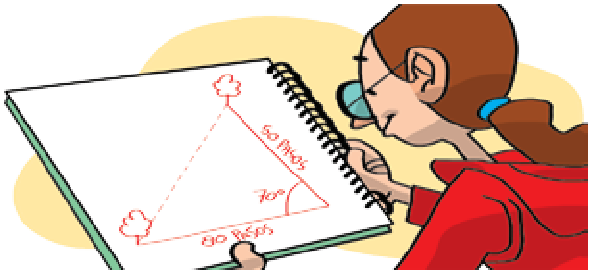
A partir de los triángulos que forman el generador con el suelo y las distintas posiciones en las que se encuentran Blas y Raúl podemos relacionar la altura del generador con las distancias utilizando las tangentes:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} 60° = \dfrac{h}{41-d} \\ \operatorname{tg} 45° = \dfrac{h}{d}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} 60° \cdot (41-d) = h \\ \operatorname{tg} 45° \cdot d = h\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Igualación}} \operatorname{tg} 60° \cdot (41-d) = \operatorname{tg} 45° \cdot d \to d = \frac{41 \cdot \operatorname{tg} 60°}{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 60°} \approx 26 \text{ m}$$

Sustituyendo: $h = d \cdot \operatorname{tg} 45° = 26 \cdot \operatorname{tg} 45° \approx 26$ m

Como la altura de ellos es muy pequeña podemos considerar que la altura del generador es de 26 m.

143 Fátima está haciendo el esquema de un terreno que hay que reforestar y ha tomado estas medidas.



¿Se ajusta el esquema a la realidad? Halla las medidas que faltan y haz un esquema sabiendo que ha mantenido pasos constantes de 1 m aproximadamente. ¿Cuáles son el perímetro y el área?

El esquema está desproporcionado. En el dibujo ha trazado los lados prácticamente iguales.

Si los pasos son de 1 m aproximadamente, aplicando el teorema del coseno, el lado que falta mide:

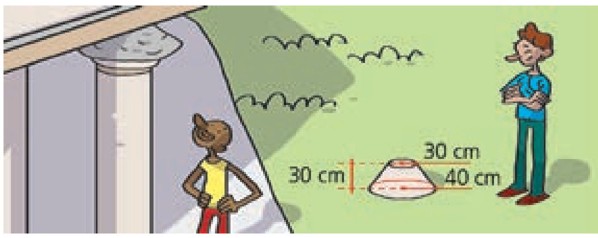
$$c = \sqrt{50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 70°} \approx 78{,}51 \text{ m} \to P = 50 + 80 + 78{,}51 = 208{,}51 \text{ m}$$

La altura sobre el lado de 80 m sería: $\operatorname{sen} \hat{C} = \dfrac{h_a}{b} \to \operatorname{sen} 70° = \dfrac{h_a}{50} \to h_a = 50 \cdot \operatorname{sen} 70° \approx 46{,}98$ m

Y el área: $A = \dfrac{a \cdot h_a}{2} \approx \dfrac{80 \cdot 46{,}98}{2} = 1879{,}38 \text{ m}^2$

El perímetro del terreno es de, aproximadamente, 209 m y el área de unos 1 879 m^2.

144 Durante la restauración de una antigua ermita se va a sustituir un capitel deteriorado por una pieza en forma de tronco de cono de las mismas dimensiones. ¿Cuál será su volumen? Determina su peso si la densidad del granito es de 2 600 kg/m^3.



Aplicamos semejanza para conocer la altura del cono mayor y menor:

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R} \to \frac{h}{30} = \frac{h+30}{40} \to 40h = 30h + 900 \to h = 90 \text{ cm} \to H = 120 \text{ cm}$$

Así el volumen es:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \frac{\pi \cdot (40^2 \cdot 120 - 30^2 \cdot 90)}{3} \approx 116\,238{,}93 \text{ cm}^3 \approx 0{,}116 \text{ m}^3$$

Y el peso: $2600 \cdot 0{,}116 = 301{,}6$ kg

Pesa unos 300 kg.

Matemáticas vivas. La distancia del horizonte

7 MATEMÁTICAS VIVAS

Gala está con sus amigos observando el mar y el horizonte desde el mirador en un acantilado de 100 m de altura. Se preguntan cuál es el punto más lejano del horizonte que se alcanza a ver desde allí o la distancia más lejana a la que podrán ver barcos navegando.

COMPRENDE

1 Para calcular la distancia a la que está la línea del horizonte, es necesario tener en cuenta la altura a la que nos encontramos y el tamaño de la Tierra.

a. ¿Verán el horizonte a la misma distancia una persona sentada en la orilla del mar que otra que esté sentada en un acantilado? ¿Quién podrá ver más lejos? PIENSA Y RAZONA

b. ¿De qué depende la distancia del horizonte? COMUNICA

c. La línea entre nuestros ojos y el punto en el que vemos desaparecer un barco por el horizonte forma un ángulo recto con el radio terrestre. Con esta información copia un esquema de la figura y traza un triángulo que una los ojos del observador, la línea del horizonte y el centro de la Tierra. UTILIZA EL LENGUAJE MATEMÁTICO REPRESENTA

d. ¿Qué tipo de triángulo es? La distancia a la que se encuentra la línea del horizonte ¿qué elemento es del triángulo?

e. Coloca sobre el triángulo que has dibujado los datos que conozcas. ¿A qué distancia está la línea del horizonte para Gala? Explica cómo has encontrado esa distancia. RESUELVE

RELACIONA

2 En muchas islas del Mediterráneo se construyeron torres y atalayas de vigilancia cerca de la línea de costa para defenderlas de incursiones piratas. Se edificaron altas torres y cuando era posible se situaban también en puntos de cierta altitud. Las de Compte y Cap des Jueu son torres de vigilancia ubicadas al sudoeste de la isla de Ibiza con cotas de 12 m y 200 m, respectivamente.

a. Dibuja el triángulo correspondiente a cada torre y sitúa los datos. ¿Hay mucha diferencia entre los lados conocidos del triángulo? Con los datos que obtuviste para la altitud de Gala, aventura qué diferencia crees que habrá entre la línea del horizonte que se alcanza desde una y otra. REPRESENTA

b. Calcula a qué distancia se ve efectivamente el horizonte desde cada una. PIENSA Y RAZONA

c. ¿Hay mucha diferencia entre las alturas de ambas torres? ¿Cuánto? ¿Y entre las distancias? ¿Es proporcional la distancia del horizonte y la altura? ¿Por qué?

d. Fijándote en el ángulo del vértice en el que se sitúa el observador, ¿qué razón trigonométrica relaciona los dos lados que lo forman? Calcula en cada caso el valor de ese ángulo. ¿Son semejantes los triángulos?

168

La distancia del horizonte 7

REFLEXIONA

3 Gala cree que los barcos que divisa quizá estén un poco más lejos aún, puesto que no se encuentran a nivel del mar, sino que tienen cierta altura. El triángulo del que se sirvió para calcular la distancia de la línea del horizonte ya no es válido; ahora hay dos triángulos: el del observador y el del barco.

a. Copia y completa en este dibujo los triángulos que relacionan el barco y el observador. ¿Qué datos puedes averiguar? MODELIZA

b. Averigua a qué distancia se habría divisado desde la torre de Compte y desde Cap des Jueu un barco de corsarios cuyo palo mayor tuviera una altura de 12 m. RESUELVE

c. El punto más alto de la isla de Ibiza es la cima de Sa Talaia, que se alza a 475 m de altitud sobre el nivel del mar. Averigua a qué distancia se avistaría el barco desde allí. RESUELVE

d. Calcula el ángulo que forma en ese punto la hipotenusa con la visual. ¿Qué variación hay con los anteriores?

e. Sobre un mapa de Ibiza traza la circunferencia con el radio más grande de avistamiento desde cada punto. Usa la escala del mapa para determinar qué radio debes medir en él. ¿Se alcanza a ver Formentera desde Ibiza? REPRESENTA

f. Imagina un barco pirata que navegase a una velocidad de 5 nudos. ¿De cuánto tiempo dispondrían los habitantes de la isla para reaccionar desde que lo divisaran? ARGUMENTA

TRABAJO COOPERATIVO

TAREA

- Averiguad con el mismo procedimiento a qué distancia está la línea del horizonte desde el pico más alto del Teide. ¿Hasta dónde se vería en un día claro?
- Buscad cuál es el pico más alto de Lanzarote y su altitud, así como la distancia entre este punto y el Teide. Razonad si es posible divisar ese punto de Lanzarote desde el Teide.
- Explicad el proceso seguido a vuestros compañeros.

169

Sugerencias didácticas

En esta sección trabajamos de un modo más concreto las competencias, en particular la competencia matemática. Se presenta una situación práctica en la que se utiliza la medida de triángulos.

En la resolución de diferentes actividades de comprensión, relación y reflexión, los alumnos desarrollarán algunas de las competencias matemáticas evaluadas por el estudio PISA: Piensa y razona, Comunica, Utiliza el lenguaje matemático, Representa, Resuelve, Modeliza o Argumenta.

Para finalizar la sección se incluye el apartado **Trabajo cooperativo** donde se propone una tarea cuya estrategia cooperativa es *Búsqueda de información,* de **Mel Silberman**.

Para desarrollar esta tarea, los alumnos investigarán sobre aspectos geográficos del Teide y otros picos, y obtendrán ciertos datos siguiendo el mismo procedimiento utilizado en la actividad anterior.

¿Cómo se realizará la tarea? Los alumnos realizarán la tarea en pequeños grupos y, finalmente, examinarán sus respuestas con el resto de la clase, y las elaborarán para ampliar los resultados.

Soluciones de las actividades

Gala está con sus amigos observando el mar y el horizonte desde el mirador en un acantilado de 100 m de altura. Se preguntan cuál es el punto más lejano del horizonte que se alcanza a ver desde allí o la distancia más lejana a la que podrán ver barcos navegando.

Comprende

1 Para calcular la distancia a la que está la línea del horizonte, es necesario tener en cuenta la altura a la que nos encontramos y el tamaño de la Tierra.

a) ¿Verán el horizonte a la misma distancia una persona sentada en la orilla del mar que otra que esté sentada en un acantilado? ¿Quién podrá ver más lejos?

b) ¿De qué depende la distancia del horizonte?

c) La línea entre nuestros ojos y el punto en el que vemos desaparecer un barco por el horizonte forma un ángulo recto con el radio terrestre.

Con esta información copia un esquema de la figura y traza un triángulo que una los ojos del observador, la línea del horizonte y el centro de la Tierra.

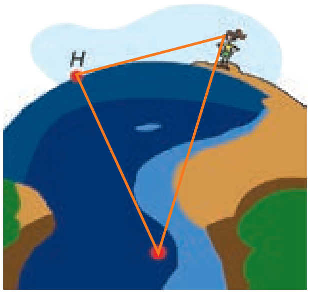
d) ¿Qué tipo de triángulo es? La distancia a la que se encuentra la línea del horizonte ¿qué elemento es del triángulo?

e) Coloca sobre el triángulo que has dibujado los datos que conozcas. ¿A qué distancia está la línea del horizonte para Gala? Explica cómo has encontrado esa distancia.

a) Alcanzará a ver más lejos la persona que se encuentra a mayor altura.

b) La distancia a la que se encuentra el horizonte que vemos depende de la altura a la que estamos.

c)



d) Es un triángulo rectángulo. La distancia a la que se encuentra la línea del horizonte es uno de los catetos del triángulo.

e) El radio terrestre es uno de los catetos, 6 378 km, y la hipotenusa es, esta distancia más la altura a la que se encuentra Gala, 6 378,1 km. Aplicando el teorema de Pitágoras determinamos el otro cateto, distancia a la que se encuentra el horizonte.

$$\text{Horizonte} = \sqrt{6\,378{,}1^2 - 6\,378^2} \approx 35{,}72 \text{ km}$$

Relaciona

2 En muchas islas del Mediterráneo se construyeron torres y atalayas de vigilancia cerca de la línea de costa para defenderlas de incursiones piratas. Se edificaron altas torres y cuando era posible se situaban también en puntos de cierta altitud. Las de Compte y Cap des Jueu son torres de vigilancia ubicadas al sudoeste de la isla de Ibiza con cotas de 12 m y 200 m, respectivamente.

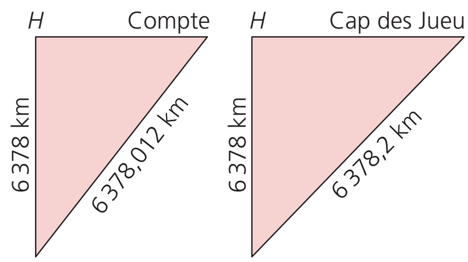
a) Dibuja el triángulo correspondiente a cada torre y sitúa los datos. ¿Hay mucha diferencia entre los lados conocidos del triángulo? Con los datos que obtuviste para la altitud de Gala, aventura qué diferencia crees que habrá entre la línea del horizonte que se alcanza desde una y otra.

b) Calcula a qué distancia se ve efectivamente el horizonte desde cada una.

c) ¿Hay mucha diferencia entre las alturas de ambas torres? ¿Cuánto? ¿Y entre las distancias? ¿Es proporcional la distancia del horizonte y la altura? ¿Por qué?

d) Fijándote en el ángulo del vértice en el que se sitúa el observador, ¿qué razón trigonométrica relaciona los dos lados que lo forman? Calcula en cada caso el valor de ese ángulo. ¿Son semejantes los triángulos?

a) No hay mucha diferencia entre los datos, que los alumnos estimen a qué distancia creen ellos que estará el horizonte en cada caso. Los triángulos dibujados solo son un esquema, no están hechos a escala, ya que los datos son muy parecidos y no se verían bien.



b) Aplicamos el teorema de Pitágoras como en el ejercicio anterior:

$$\text{Horizonte en Compte} = \sqrt{6\,378{,}012^2 - 6\,378^2} \approx 12{,}37 \text{ km}$$

$$\text{Horizonte en Cap des Jueu} = \sqrt{6\,378{,}2^2 - 6\,378^2} \approx 50{,}51 \text{ km}$$

c) Entre la altura de Compte y la de Gala hay 88 m de diferencia y 23,35 km entre las distancias al horizontes. Entre Gala y Cap des Jueu la diferencia entre las alturas es 12 metros mayor y sin embargo la diferencia de distancias es menor. Los puntos del horizonte en este caso se diferencian en 14,79 km. No son proporcionales.

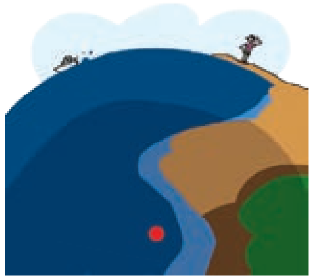
d) Ambas distancias están relacionadas por la razón seno del ángulo que forman la visual del observador y la línea que le une con el centro de la tierra.

Compte: $\alpha = \text{arc sen } \dfrac{6\,378}{6\,378{,}012} \approx 89°\ 53'\ 19{,}88''$ Cap des Jueu: $\beta = \text{arc sen } \dfrac{6\,378}{6\,378{,}2} \approx 89°\ 32'\ 46{,}54''$

Los triángulos no son semejantes, sus ángulos no son iguales.

Reflexiona

3 Gala cree que los barcos que divisa quizá estén un poco más lejos aún, puesto que no se encuentran a nivel del mar, sino que tienen cierta altura. El triángulo del que se sirvió para calcular la distancia de la línea del horizonte ya no es válido; ahora hay dos triángulos: el del observador y el del barco.



a) Copia y completa en este dibujo los triángulos que relacionan el barco y el observador. ¿Qué datos puedes averiguar?

b) Averigua a qué distancia se habría divisado desde la torre de Compte y desde Cap des Jueu un barco de corsarios cuyo palo mayor tuviera una altura de 12 m.

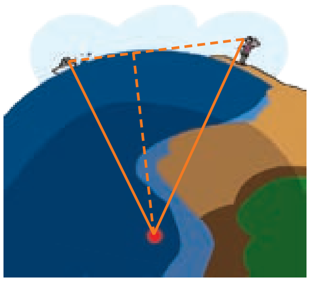
c) El punto más alto de la isla de Ibiza es la cima de Sa Talaia, que se alza a 475 m de altitud sobre el nivel del mar. Averigua a qué distancia se avistaría el barco desde allí.

d) Calcula el ángulo que forma en ese punto la hipotenusa con la visual. ¿Qué variación hay con los anteriores?

e) Sobre un mapa de Ibiza traza la circunferencia con el radio más grande de avistamiento desde cada punto. Usa la escala del mapa para determinar qué radio debes medir en él. ¿Se alcanza a ver Formentera desde Ibiza?

f) Imagina un barco pirata que navegase a una velocidad de 5 nudos. ¿De cuánto tiempo dispondrían los habitantes de la isla para reaccionar desde que lo divisaran?

a)



Se pueden determinar el cateto que une el punto del horizonte con el centro terrestre, y las hipotenusas que tendrán esta longitud más las alturas a las que se encuentran el observador y el punto más alto del barco.

b) Para averiguar la distancia a la que está el barco en cada caso hay que determinar la distancia del horizonte desde el punto más alto del barco y sumarle la del observador al punto del horizonte.

Horizonte desde el barco $= \sqrt{6\,378{,}012^2 - 6\,378^2} \approx 12{,}37$ km

Desde Compte el barco se ve a: $12{,}37 + 12{,}37 = 24{,}74$ km de distancia.

Desde Cap des Jueu esa distancia es de: $12{,}37 + 50{,}51 = 62{,}88$ km.

c) Desde Sa Talaia: Horizonte en Sa Talaia $= \sqrt{6\,378{,}475^2 - 6\,378^2} \approx 77{,}84$ km

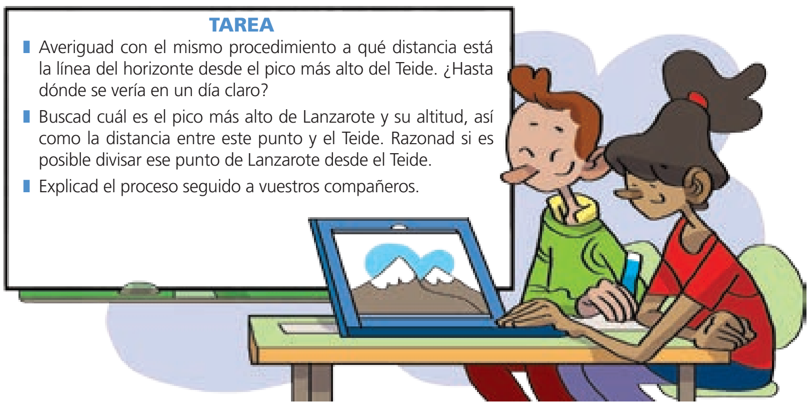
Luego el barco se divisaría a $12{,}37 + 77{,}84 = 90{,}21$ km de distancia.

d) El ángulo que se forma en ese caso es menor: $\gamma = \text{arc sen}\ \dfrac{6\,378}{6\,378{,}475} \approx 89°\ 18'\ 2{,}72''$

e) Sobre un mapa de Ibiza localizar los tres puntos y los círculos con las distancias de avistamiento de un barco. Que se den cuenta de que en un día claro es posible ver naves que se acercan a gran distancia.

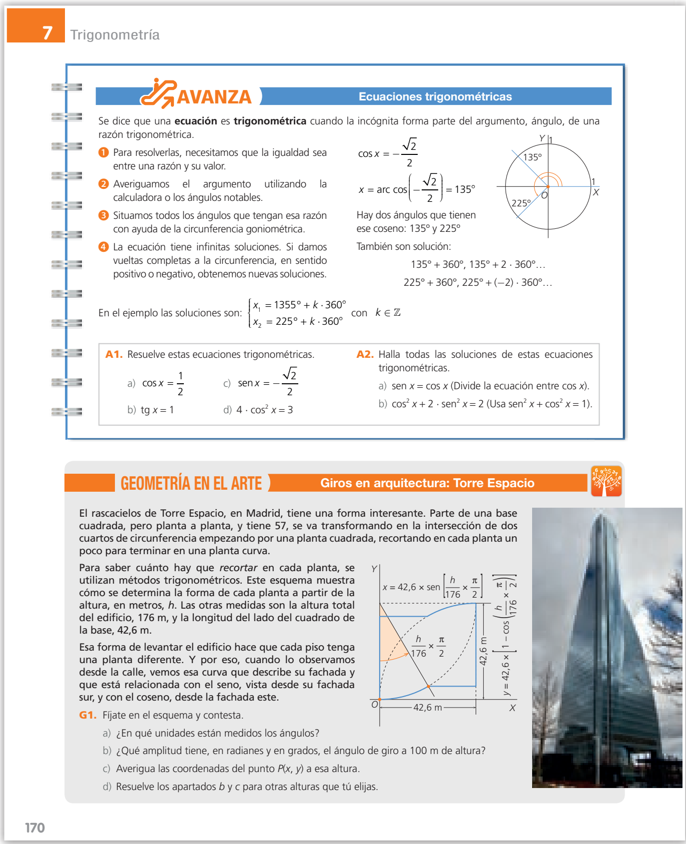
f) La velocidad de 5 nudos es aproximadamente de 9,26 km/h. Es decir, el barco tardaría: $\dfrac{90{,}21}{9{,}26} = 9{,}741... \approx 9$ h 45 min

Trabajo cooperativo



Respuesta abierta.

Avanza. Ecuaciones trigonométricas


7 Trigonometría

AVANZA — Ecuaciones trigonométricas

Se dice que una **ecuación** es **trigonométrica** cuando la incógnita forma parte del argumento, ángulo, de una razón trigonométrica.

1. Para resolverlas, necesitamos que la igualdad sea entre una razón y su valor.
2. Averiguamos el argumento utilizando la calculadora o los ángulos notables.
3. Situamos todos los ángulos que tengan esa razón con ayuda de la circunferencia goniométrica.
4. La ecuación tiene infinitas soluciones. Si damos vueltas completas a la circunferencia, en sentido positivo o negativo, obtenemos nuevas soluciones.

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$

Hay dos ángulos que tienen ese coseno: 135° y 225°

También son solución:

$135° + 360°,\ 135° + 2 \cdot 360°\ldots$

$225° + 360°,\ 225° + (-2) \cdot 360°\ldots$

En el ejemplo las soluciones son: $\begin{cases} x_1 = 1355° + k \cdot 360° \\ x_2 = 225° + k \cdot 360° \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

A1. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\text{tg}\ x = 1$ c) $\text{sen}\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $4 \cdot \cos^2 x = 3$

A2. Halla todas las soluciones de estas ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}\ x = \cos x$ (Divide la ecuación entre $\cos x$).

b) $\cos^2 x + 2 \cdot \text{sen}^2 x = 2$ (Usa $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$).

GEOMETRÍA EN EL ARTE — Giros en arquitectura: Torre Espacio

El rascacielos de Torre Espacio, en Madrid, tiene una forma interesante. Parte de una base cuadrada, pero planta a planta, y tiene 57, se va transformando en la intersección de dos cuartos de circunferencia empezando por una planta cuadrada, recortando en cada planta un poco para terminar en una planta curva.

Para saber cuánto hay que *recortar* en cada planta, se utilizan métodos trigonométricos. Este esquema muestra cómo se determina la forma de cada planta a partir de la altura, en metros, *h*. Las otras medidas son la altura total del edificio, 176 m, y la longitud del lado del cuadrado de la base, 42,6 m.

Esa forma de levantar el edificio hace que cada piso tenga una planta diferente. Y por eso, cuando lo observamos desde la calle, vemos esa curva que describe su fachada y que está relacionada con el seno, vista desde su fachada sur, y con el coseno, desde la fachada este.

G1. Fíjate en el esquema y contesta.

a) ¿En qué unidades están medidos los ángulos?

b) ¿Qué amplitud tiene, en radianes y en grados, el ángulo de giro a 100 m de altura?

c) Averigua las coordenadas del punto $P(x, y)$ a esa altura.

d) Resuelve los apartados *b* y *c* para otras alturas que tú elijas.

170

Sugerencias didácticas

En la sección Avanza de esta unidad se introducen las ecuaciones trigonométricas. Con ejemplos sencillos se avanza su resolución que se trabajará en el curso próximo.

Soluciones de las actividades

A1. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\text{tg}\ x = 1$ c) $\text{sen}\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $4 \cdot \cos^2 x = 3$

a) $\cos x = \frac{1}{2} \to x = \text{arc cos}\ \frac{1}{2} \to \begin{cases} x_1 = 60° + k \cdot 360° \\ x_2 = 300° + k \cdot 360° \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{tg}\ x = 1 \to x = \text{arc tg}\ 1 \to \begin{cases} x_1 = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = 225° + k \cdot 360° \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{sen}\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to x = \text{arc sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to \begin{cases} x_1 = 225° + k \cdot 360° \\ x_2 = 315° + k \cdot 360° \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

d) $4 \cdot \cos^2 x = 3 \to \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{cases} x = \text{arc cos}\ \frac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{cases} x_1 = 30° + k \cdot 360° \\ x_2 = 330° + k \cdot 360° \end{cases} \\ x = \text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to \begin{cases} x_3 = 150° + k \cdot 360° \\ x_4 = 210° + k \cdot 360° \end{cases} \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

A2. Halla todas las soluciones de estas ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}\ x = \cos x$ (Divide la ecuación entre $\cos x$).

b) $\cos^2 x + 2 \cdot \text{sen}^2 x = 2$ (Usa $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$).

a) $\text{sen}\ x = \cos x \xrightarrow{:\cos x} \text{tg}\ x = 1 \to x = \text{arc tg}\ 1 \to \begin{cases} x_1 = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = 225° + k \cdot 360° \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos^2 x + 2 \cdot \text{sen}^2 x = 2 \to 1 + \text{sen}^2 x = 2 \to \text{sen}\ x = \pm 1 \to \begin{cases} x = \text{arc sen}\ 1 \to x_1 = 90° + k \cdot 360° \\ x = \text{arc sen}\ (-1) \to x_2 = 270° + k \cdot 360° \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

Geometría en el arte. Giros en arquitectura: Torre Espacio

Sugerencias didácticas

Para finalizar la unidad se ve la presencia de la Trigonometría en nuestra cultura a través de la arquitectura. Se analiza la construcción del edificio Torre Espacio de Madrid en el que se perciben claramente el uso de las razones trigonométricas en su diseño.

Soluciones de las actividades

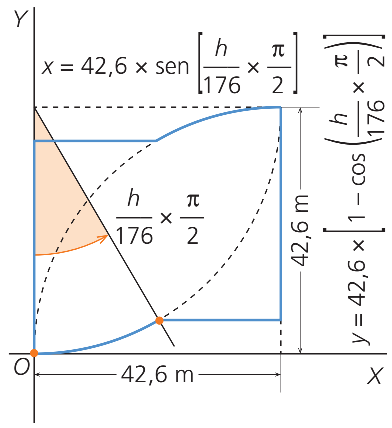
G1. Fíjate en el esquema y contesta.

a) ¿En qué unidades están medidos los ángulos?

b) ¿Qué amplitud tiene, en radianes y en grados, el ángulo de giro a 100 m de altura?

c) Averigua las coordenadas del punto $P(x, y)$ a esa altura.

d) Resuelve los apartados *b* y *c* para otras alturas que tú elijas.



a) Los ángulos se dan medidos en radianes.

b) A 100 metros de altura el ángulo es de: $\frac{100}{176} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{25}{88}\pi \text{ rad} = 51^\circ\, 8'\, 11''$

c) Las coordenadas del punto son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 42{,}6 \cdot \text{sen}\left(\frac{25}{88}\pi\right) \approx 33{,}17 \text{ m} \\ y &= 42{,}6 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{25}{88}\pi\right)\right] \approx 15{,}87 \text{ m} \end{aligned}\right\} \rightarrow P(33{,}17;\ 15{,}87)$$

d) Respuesta abierta. Sustituyendo la altura elegida como en los apartados anteriores.