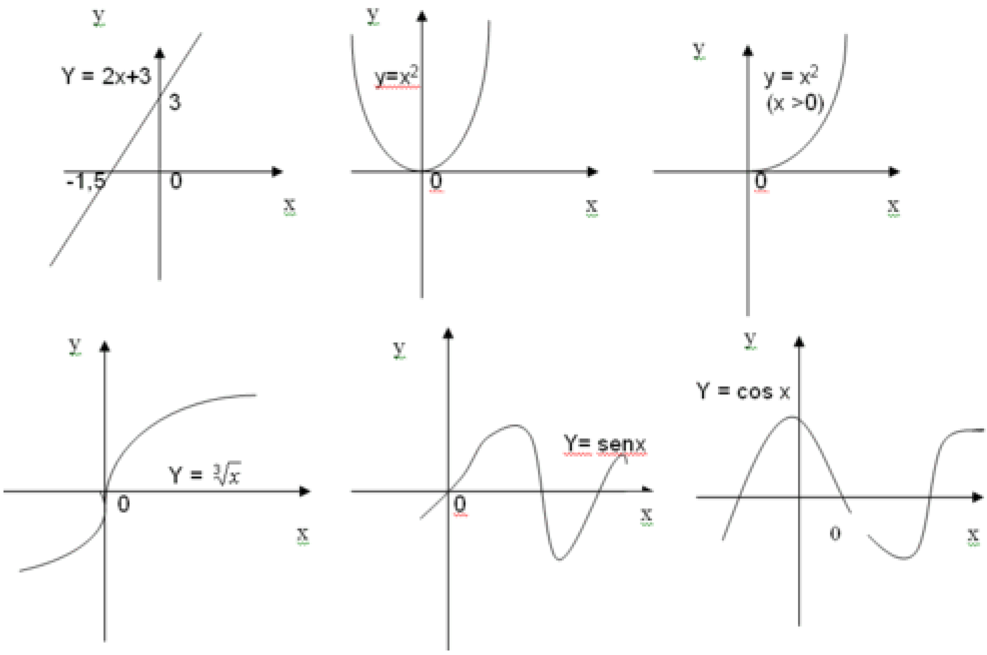
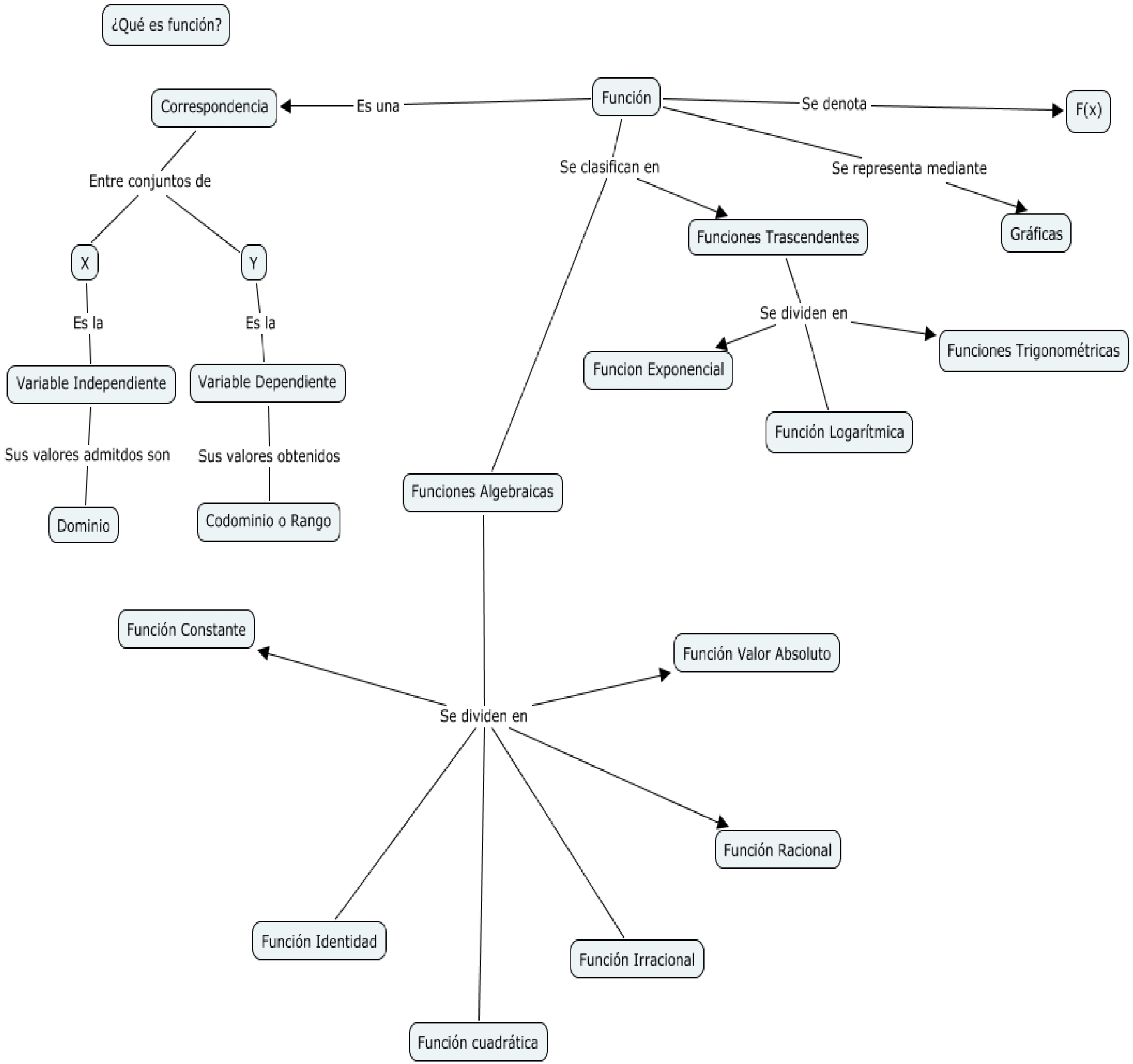
Materia: Matemáticas 4º ESO

y = f (x)



Unidad I –Marzo 2012


¿Qué es función?
Función
Es una
Correspondencia
Se denota
F(x)
Se clasifican en
Se representa mediante
Gráficas
Entre conjuntos de
X
Y
Es la
Es la
Variable Independiente
Variable Dependiente
Sus valores admitdos son
Sus valores obtenidos
Dominio
Codominio o Rango
Funciones Trascendentes
Se dividen en
Funcion Exponencial
Función Logarítmica
Funciones Trigonométricas
Funciones Algebraicas
Se dividen en
Función Constante
Función Valor Absoluto
Función Racional
Función Identidad
Función Irracional
Función cuadrática

“FUNCIONES”

OBJETIVO GENERAL DEL TEMA:

Conocer los aspectos básicos de las funciones: Visualizar que es una función, Clasificarlas, Identificar cada una de acuerdo a su expresión matematica, Representar graficamente y=f(x), Obtener información de esa representacion y reconocer ciertos conjuntos asociados a las funciones tales como el dominio y rango.

CONTENIDO:

1) FUNCIÓN.

- DEFINICIÓN:

Una función es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

- ***x*** es la **variable independiente**
- ***y*** es la **variable dependiente**

Se dice que ***y*** es función de ***x***, lo que se escribe bajo la ecuación de la forma ***y = f(x).***

La función es una relación muy particular, ya que asocia a cada valor del conjunto de partida (***x***) **un único** valor del conjunto de llegada (***y***).

Las funciones sirven para describir fenómenos físicos, químicos, económicos, biológicos, sociológicos o, simplemente, para expresar relaciones matemáticas:

- La distancia recorrida por un móvil al transcurrir el tiempo.
- El volumen de un líquido al aumentar la temperatura
- El área de un círculo al variar la longitud de su radio.

2) FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL.

- DEFINICIÓN

Dado que durante este curso vamos a trabajar con funciones reales de variable real, es importante conocer su definición.

Se llama *función real de variable real* a toda función en la cual cada elemento de “***x***” toma únicamente valores reales y, a su vez, son números reales los valores de f(x).

Por ejemplo: $f(x) = x^2 + 3x - 4$

Si x = 2 (que es un número real), entonces f(2) = 6 (que también es un número real), por lo tanto $f(x) = x^2 + 3x - 4$ es una función real de variable real.

- CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES.

Esta clase de funciones se pueden clasificar en dos grandes grupos:

(a) Algebraicas: Polinómicas, Irracionales y Racionales.
(b) Trascendentes: Trigonométricas, Exponenciales y Logarítmicas.

- GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN.

A partir del gráfico de una función se puede obtener mayor información sobre su comportamiento (el dominio, el rango, los interceptos, los puntos de discontinuidad, los intervalos donde la gráfica es creciente, decreciente o constante, los puntos de inflexión, la simetría, etc.), información que puede no ser evidente con solo los datos algebraicos.

Para representar una función geométricamente como un gráfico se utiliza el plano cartesiano de coordenadas rectangulares, de tal manera que la gráfica de la función y = f(x) es el conjunto de pares ordenados de la forma (*x* ; *y*) = (*x* ; *f(x)*).

Sobre los ejes cartesianos representamos las dos variables:
- La variable independiente "***x***" se localiza sobre el eje horizontal (eje de **abscisas**).
- La variable dependiente "**y**" se ubica sobre el eje vertical (eje de **ordenadas**).

Utilizando una tabla de valores se puede obtener una aproximación de la gráfica de la función.

Más adelante profundizaremos sobre este aspecto.

- **DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN.**

<u>Dominio</u>:

Una función la podemos visualizar como un mecanismo de caja cerrada, en la que entra un número "x"; la máquina lo procesa f(x) y sale otro número "y".

A veces esta 'máquina' no funciona con determinados valores. Al conjunto de valores de la variable para los que la función existe (para los que la 'máquina ' funciona) se llama ***dominio*** de la función.

Por ejemplo:

Para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, la función no está definida para x=0, es decir f(0) = (no existe) ya que cualquier número dividido entre cero constituye una indeterminación matemática.

En tal sentido, el dominio de $f(x) = \frac{1}{x}$ es el conjunto de valores para los cuales la función está definida, y está formado por aquellos valores de ***x*** (números reales) para los que se puede calcular f(x). Por lo tanto, su dominio son todos los números reales excepto el cero.

$f(x) = \frac{1}{x}$ Dom f(x) = R - $\{0\}$ = (- , 0) U (0 , +)

<u>Rango:</u>

Una función arroja un valor, pero esto no quiere decir que se obtengan todos los valores que se nos antojen. El conjunto de valores que se obtienen a partir del conjunto de valores del dominio se llama ***rango, imagen o codominio*** de la función.

Por ejemplo:

La función y = x^2 nunca arroja valores negativos.

En tal sentido, el rango de f(x) = x^2, es el conjunto conformado por todos los valores que puede arrojar la función (posibles valores de "y"), los cuales están determinados por el dominio de la función. Por lo tanto, su rango son todos los números reales positivos, incluyendo el cero.

f(x) = x^2 Rgo f(x) = R^+ U 0 $\{=\}$ 0 , +)

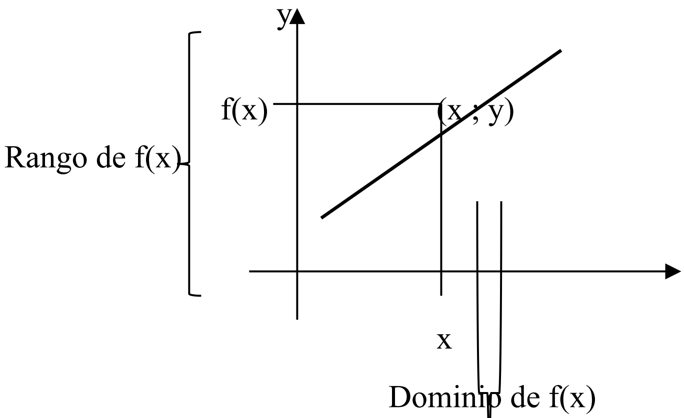
En conclusión:

El Dominio de una función es el conjunto de valores que toma la variable independiente "**x**".
El Rango es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente **"y**" ó f(x).

Si tenemos la gráfica de la función:

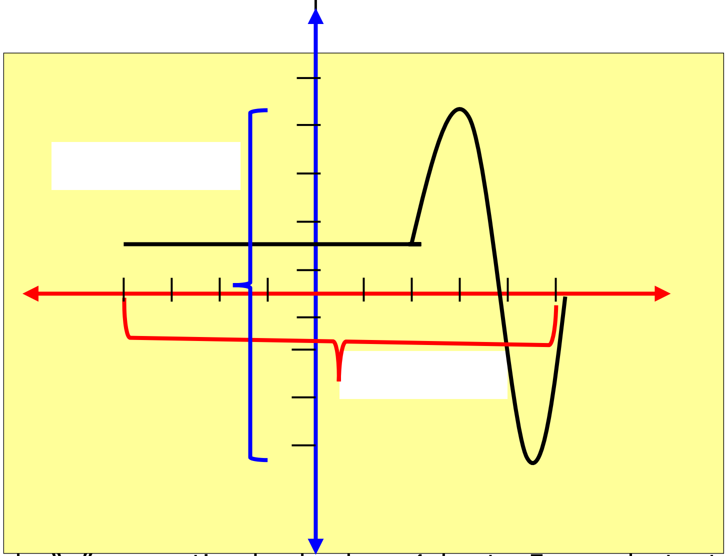
- Para inferir el **dominio**, debes buscar hasta donde se extiende la gráfica de **izquierda a derecha**, en el **eje horizontal**.

- Para determinar el **rango**, debes buscar de **abajo hacia arriba**, la extensión de la gráfica en el **eje vertical**.



Por ejemplo:

Considera la siguiente gráfica:



La gráfica en el eje de "x", se extiende desde - 4 hasta 5, por lo tanto, el **dominio** de la función es **[- 4 , 5].**

La gráfica en el eje de "y" se extiende desde - 4 hasta 4.5, por lo tanto, el **rango** de la función es **[- 4 , 4.5].**

En vista de los expuesto anteriormente, a continuación analizaremos como representar geométricamente la ecuación y = f(x) , indicando como se realiza la graficación de cada uno de los diferentes tipos de funciones, ya que como hemos demostrado la gráfica puede servir para descubrir propiedades de la función que no eran evidentes en la simple ecuación, tales como su dominio y rango.

3) **FUNCIONES POLINOMICAS**

Un segundo enfoque acerca de los polinomios es verlos como reglas de correspondencia que asignan un número real p(x) a cada número real "x". En otras palabras, los polinomios pueden ser tratados como funciones. Estudiaremos ahora algunos de los tipos principales de funciones polinómicas:

3.1.) Función Afin o Constante:

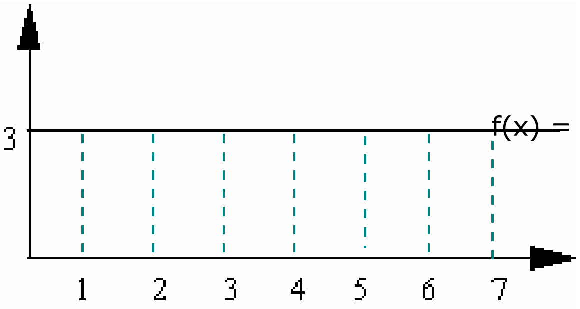
Se llama función constante a la que no depende de ninguna variable, y la podemos representar como una función matemática de la forma: f(x) = k, donde k es una constante real.

La gráfica de esta función es una recta horizontal paralela al eje "x" y corta al eje "y" en el punto k. Por lo tanto, la recta pasa por el punto (0 , k)

En tal sentido, como norma general, para esta clase de función, tenemos que el valor de "y" siempre será el mismo para cualquier del valor de "x". Por lo tanto :

Para toda funcion afín o constante tenemos que su dominio son todos los numeros reales (R) y su rango corresponde al valor de k.

Ejemplo 1. Dada la función f(x) = 3 , grafique la función e indique su dominio y rango.

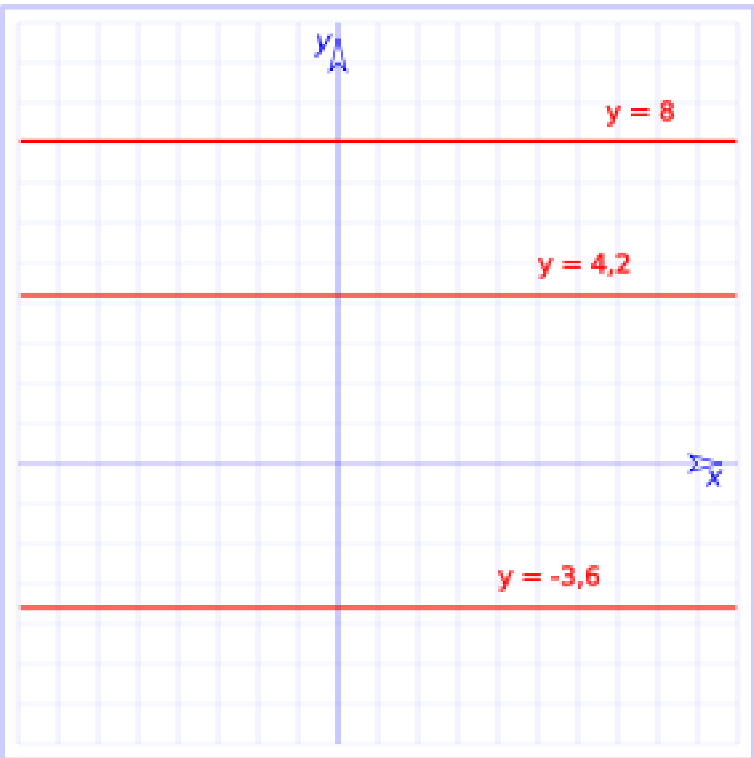


Dominio : R

Rango: { 3 }

Ejemplo 2. Dadas las funciones: f(x) = 8 ; g(x) = 4,2 ; h(x) = -3,6

Grafique cada una e indique su dominio y rango.



Para f(x) = 8

Dom f(x) = R ; Rgo f(x)= { 8 }

Para g(x) = 4,2

Dom g(x) = R ; Rgo f(x) = { 4,2 }

Para h(x) = -3,6

Dom h(x) =R ; Rgo h(x)= { -3,6 }

3.2.) Función Lineal :

La función lineal son polinomios de primer grado, es decir tienen la variable elevada al exponente 1. Es habitual no escribir el exponente cuando este es 1.

La podemos representar como una función matemática de la forma: f(x) = ax + b , donde "a" , "b" son constantes reales y "x" cualquier número real.

Su gráfica caracteristica es una línea recta inclinada.

Para trazar la gráfica de una función lineal solo es necesario conocer dos de sus puntos: el corte de la gráfica con el eje y con el eje "y".

- Corte con el eje "x":

Sustituimos a "y" por el valor de cero, quedando igualado el polinomio de primer grado a cero. Obtenemos así una ecuación, de la cual procedemos a despejar el valor de "x".

$$y = ax + b \qquad 0 = ax + b \qquad x = -\frac{b}{a}$$

Entonces cuando y = 0 , x = $-\frac{b}{a}$, por lo tanto el corte de la gráfica con el eje "x" se encuentra en el punto ($-\frac{b}{a}$, 0)

- Corte con el eje "y":

Sustituimos a "x" por el valor de cero en la función, obteniendo el valor "y" cuando x=0. De tal forma, el valor de "b" indica el corte de la recta con el eje "y".

En efecto, nótese que:

$$x = 0 \qquad f(0) = a(0) + b \qquad f(0) = b$$

Por lo tanto, cuando x = 0 , y = b , asi el corte de la gráfica con el eje "y" se encuentra en el punto (0 , b)

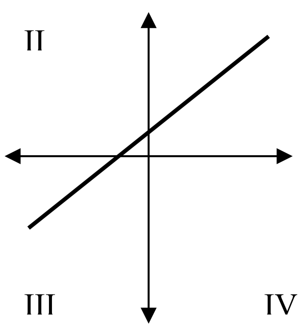
- Inclinacion de la Recta:

El signo de la constante "a" indica la inclinación o pendiente de la recta.

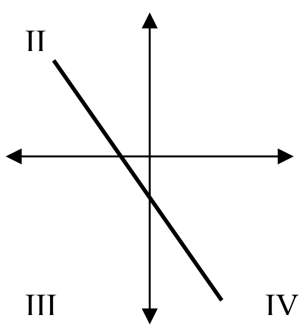
- Si a 0 , la pendiente es positiva, por lo tanto la recta cruza el primer y tercer cuadrante.
- Si a 0 ,la pendiente es negativa, entonces la recta cruza el segundo y cuarto cuadrante.

- Si a = 0, estariamos en presencia de una función afín, entonces la recta es horizontal.

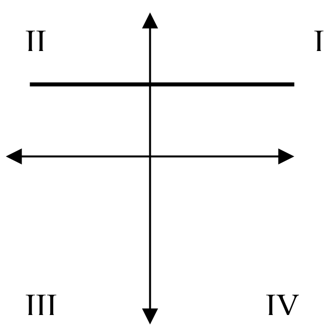
a 0 , función creciente



a 0 , función decreciente



a = 0 , función constante



Dado que f(x) existe para todo "x", el dominio de esta clase de funciones son todos los números reales (R). Es claro que el rango es también R.

Ejemplo 2. Dadas las funciones:

$$f(x) = 0{,}5x + 1 \quad ; \quad g(x) = 0.5x - 1 \quad ; \quad h(x) = 2x + 1$$

Grafique cada una e indique su dominio y rango.

En primer lugar vamos a obtener los puntos de corte sobre los ejes, ya que en base a esos dos puntos podemos trazar las rectas correspondientes.

<u>Para **f(x) = 0,5x + 1,** tenemos</u>:

- Corte en "x":

$y = 0.5x + 1$ $\quad$ $0 = 0.5x + 1$ $\quad$ $x = -\dfrac{1}{0.5} = -2$ $\quad$ Pto de corte en x = (-2 , 0)

- Corte en "y":

$x = 0$ $\quad$ $f(0) = 0.5\,(0) + 1$ $\quad$ $f(0) = 1$ $\quad$ Pto de corte en y = (0 , 1)

- Inclinación de la Recta:

Como a 0 , la pendiente es positiva, entonces efectivamente la recta cruza el primer y tercer cuadrante.

<u>Para **f(x) = 0,5x - 1,** tenemos</u>:

- Corte en "x":

$y = 0.5x - 1$ $\quad$ $0 = 0.5x - 1$ $\quad$ $x = \dfrac{1}{0.5} = 2$ $\quad$ Pto de corte en x = (2 , 0)

- Corte en "y":

$x = 0$ $\quad$ $f(0) = 0.5\,(0) - 1$ $\quad$ $f(0) = -1$ $\quad$ Pto de corte en y = (0 , -1)

- Inclinación de la Recta:

Como a 0 , la pendiente es positiva, entonces efectivamente la recta cruza el primer y tercer cuadrante.

Para **f(x) = 2x + 1,** tenemos:

- Corte en "x":

$y = 2x + 1$ $\quad$ $0 = 2x + 1$ $\quad$ $x = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ Pto de corte en x = ($\dfrac{1}{2}$, 0)

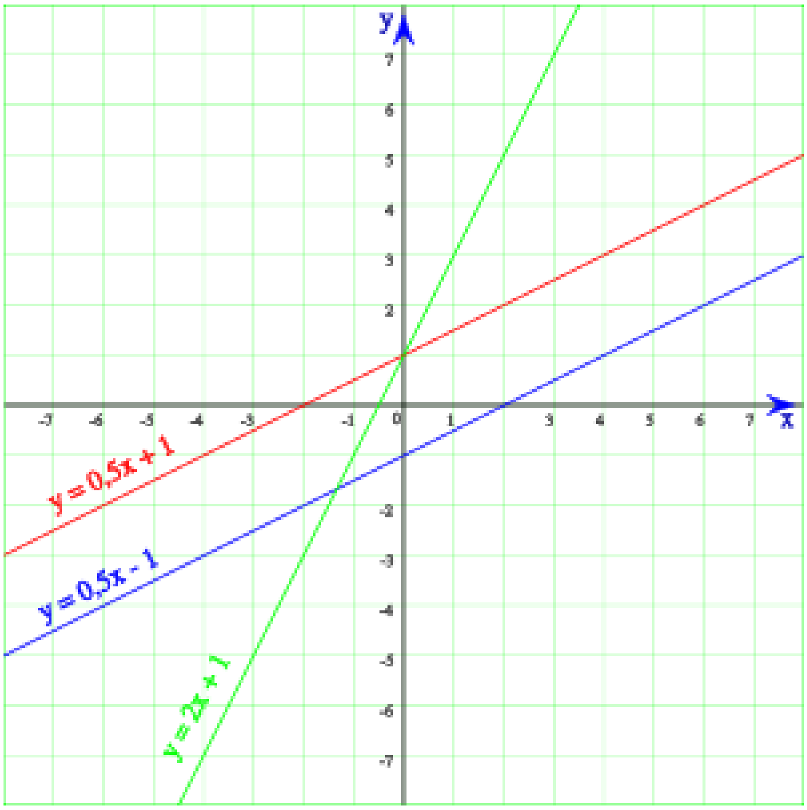
- Corte en "y":

$x = 0$ $\quad$ $f(0) = 2(0) + 1$ $\quad$ $f(0) = 1$ $\quad$ Pto de corte en y = (0 , 1)

- Inclinación de la Recta:

Como a 0 , la pendiente es positiva, entonces efectivamente la recta cruza el primer y tercer cuadrante

A continuación, y en base a los puntos de corte antes obtenidos, se muestra la gráfica en donde están representadas geométricamente las tres funciones.



En base a la gráfica podemos deducir que el dominio y rango para las tres funciones corresponde a todos los números reales (R).

3.3.) Función Cuadrática :

Se llama función cuadrática a una función polinómica real de variable real, que tiene grado dos.

La función cuadrática tiene la forma f(x) = $ax^2 + bx + c$ con a 0, y *a , b, c* son constantes.

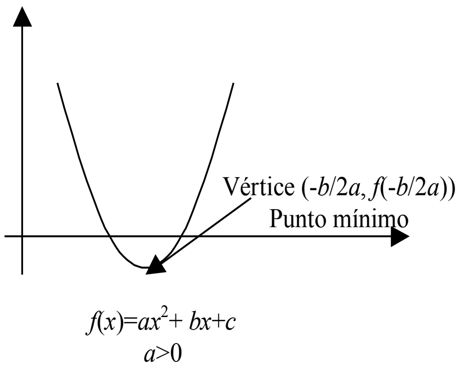
La gráfica de una función cuadrática representa una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje de las "y".

Para trazar la gráfica de una función cuadrática es necesario conocer:

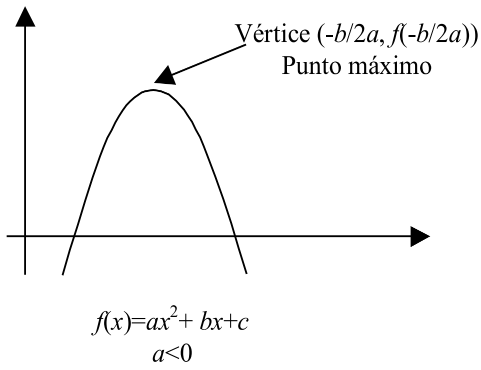
A) Como abre la parábola (cóncava hacia arriba o hacia abajo), para ello basta con observar el signo que acompaña al coeficiente de x^2, es decir el signo que acompaña a la constante "*a*". Entonces:

- Si $a > 0$, es decir es positiva, la parábola abre hacia arriba.

- Si $a < 0$, es decir es negativa, la parábola abre hacia abajo.



Cóncava hacia arriba



Cóncava hacia abajo

B) El punto máximo o mínimo de la parábola es llamado VERTICE.

- Si $a > 0$, es decir es positiva, el trinomio tiene un punto mínimo.

- Si $a < 0$, es decir es negativa, el trinomio tiene un punto máximo.

Las coordenadas "x" y "y" del vértice están dadas por la siguiente relación:

Coordenada en "x" = Vx = $-\dfrac{b}{2a}$

Coordenada en "y" = Vy = $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

Es decir, la coordenada del vértice viene dada por la siguiente coordenada:

(x , y) = (Vx , Vy) = ($-\dfrac{b}{2a}$, $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$)

C) Corte con el eje "y".

Viene dado por la constante "c".

Para la coordenada x = 0, y = f(x) = c

Con lo cual la curva pasa por el punto (0 , c)

D) Corte con el eje "x":

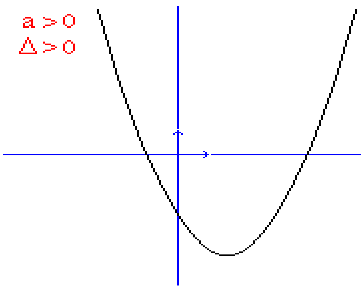
Para ello se resuelve la ecuación f(x) = 0, esto es: $ax^2 + bx + c = 0$

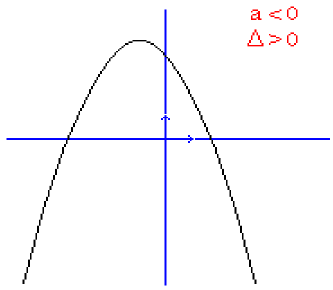
Si la ecuación tiene solución, la parábola corta al eje "x" en el punto o puntos que solucionan la ecuación (es decir, x_1 y x_2). Si la ecuación no tiene solución (raíces imaginarias) entonces, la parábola no corta al eje "x".

Evaluamos entonces el discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) :

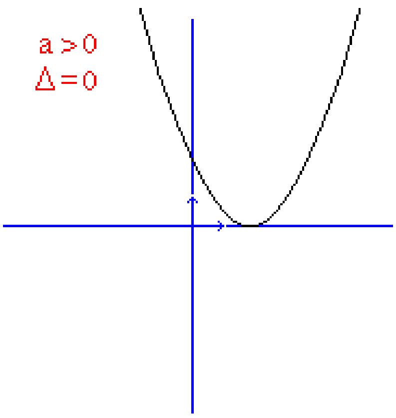
Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la parábola corta al eje "x" en dos puntos distintos.
Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la parábola corta al eje "x" en un solo punto, que será el vértice.
Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la parábola no corta al eje "x" .

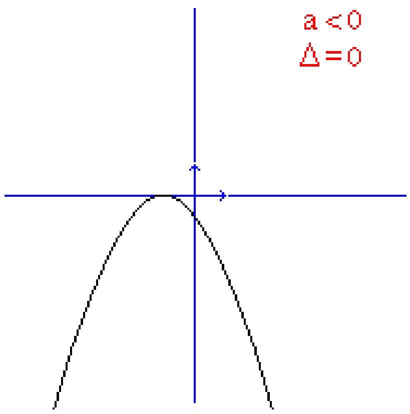
Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas, la parábola corta al eje x en esos puntos.



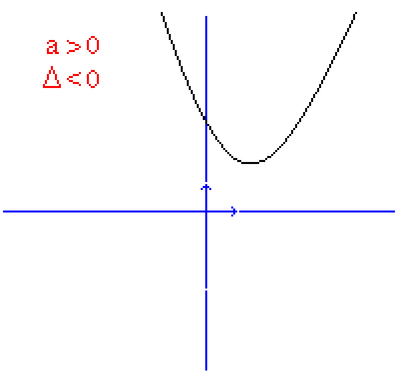


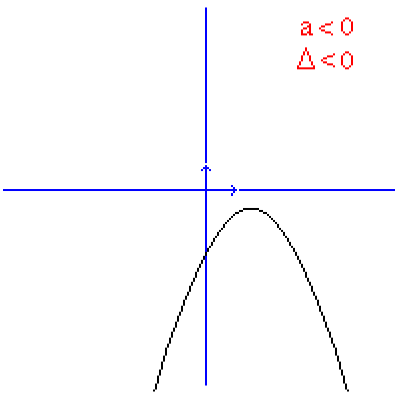
Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una raíz real doble (sola solución real), la parábola es tangente al eje x en ese punto.





Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales, la parábola no corta al eje x



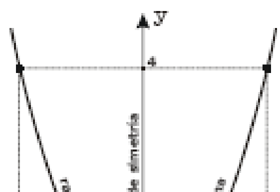


Por lo tanto, las coordenadas de la parábola cuando corta al eje "x" viene dadas por:

$$(x_1 , 0) \quad y \quad (x_2 , 0)$$

Es decir,

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right) \quad y \quad \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$$



Y finalmente como se observa, la parábola tiene un eje de simetría con respecto al vértice.

La parábola es simétrica con respecto a una recta que es paralela al eje y, esta recta recibe el nombre de eje de simetría, y está dada la coordenada en x del par ordenado que conforma el vértice (Vx).

Resumiendo para dibujar la parábola debemos determinar el tipo de concavidad, el vértice, cortes con los ejes. Se ubican todos los puntos en el plano cartesiano y trazamos la parábola por esos puntos.

Las funciones de este tipo, por ser polinómicas, tienen como dominio todos los números reales (R). El rango depende de la concavidad de la curva (signo de "a") y del valor máximo o mínimo que tome la parábola, es decir que:

Si el vértice corresponde al punto máximo de la gráfica, el rango será el intervalo (- , Vy
Si el vértice corresponde al punto mínimo de la gráfica, el rango será el intervalo Vy, +)

Ejemplo: Grafique la función y = $x^2 + 5x + 6$. Indique su dominio y rango

Para trazar la gráfica es importante deducir lo siguiente:

A) La parábola abre cóncava hacia arriba, ya "a" es +1, es un valor positivo.

B) La curva tiene un vértice que constituye el punto mínimo o más bajo de la curva, ya que el valor "a" de la función es positivo.

Las coordenadas "x" y "y" del vértice están dadas por la siguiente relación:

Coordenada en "x" = Vx = $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{(2)(1)} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$

Coordenada en "y" = Vy = $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{[(4)(1)(6)]-\left[5^2\right]}{(4)(1)} = \frac{24-25}{4} = -\frac{1}{4} = -0.{,}25$

Vértice: (Vx , Vy) : (-2,5 , -0,25)

C) Corte con el eje "y".

Viene dado por la constante "c" : (0, 6)

D) Corte con el eje "x".

Calculamos el discriminante: $b^2 - 4ac = [5^2] - [(4)(1)(6)] = 25 - 24 = 1$.

Por lo tanto, como el discriminante es mayor que cero, entonces la parábola corta al eje "x" en dos puntos distintos.

Para determinar los puntos del eje "x" que la parábola corta, utilizamos la resolvente cuadrática.

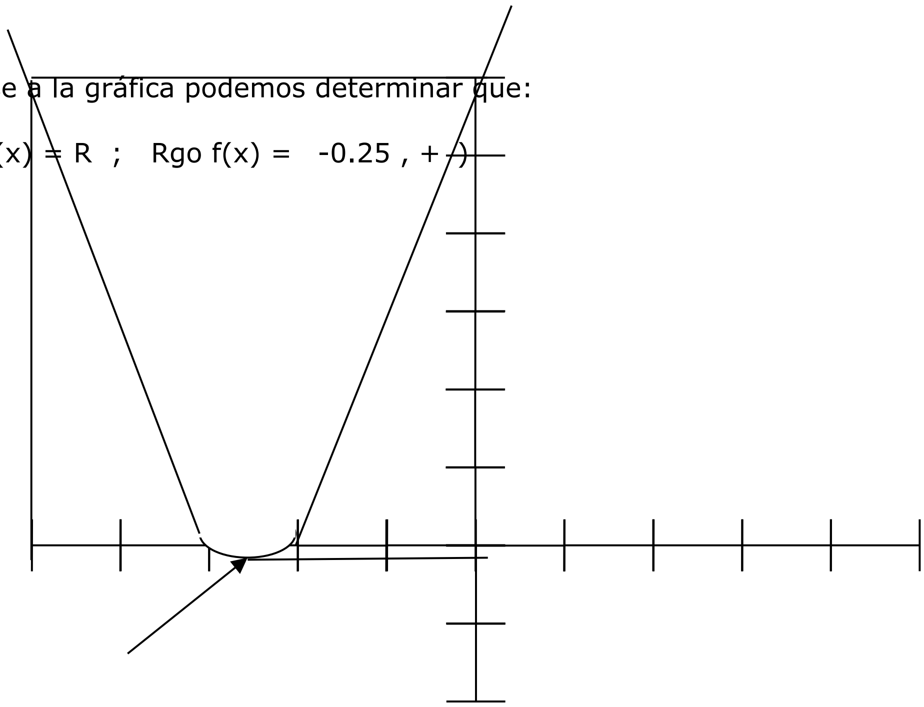
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5+1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5-1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

Coordenadas que indican el punto de corte con el eje "x": (-2 , 0) y (-3 , 0).

Con todos los puntos antes deducidos procedemos a graficar:



En base a la gráfica podemos determinar que:

Dom f(x) = R ; Rgo f(x) = -0.25 , +)