

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Método gráfico

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones



Aprenderás a...

- Identificar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Determinar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Presta atención

Las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas son pares de valores (x, y) que, al representarlos como puntos del plano, dan lugar a una recta.

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO GRÁFICO

Mateo apuntó los resultados de dos ejercicios de Matemáticas en una hoja y la ha perdido. Solo recuerda que, al verlos, llamó su atención que el doble del primero sumaba uno con el segundo.

$$x = \text{primer resultado} \quad y = \text{segundo resultado}$$

$$2x + y = 1$$

La relación entre los dos resultados se expresa con una **ecuación lineal**.

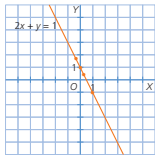
Para resolverla, Mateo busca los pares de valores que verifican la ecuación, prueba opciones y obtiene estos resultados:

$$x = 1 \text{ e } y = -1 \rightarrow 2 \cdot 1 + (-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ e } y = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

Los anota en una tabla y, al representarlos como puntos en el plano, resulta una recta.

x	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$...
y	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$...



Comprueba que las soluciones son infinitas, y solo con esa información es imposible determinar los resultados de los ejercicios.

Pero recuerda, además, que el segundo resultado era el doble que el primero. Ahora tiene dos condiciones, por lo que plantea un **sistema**:

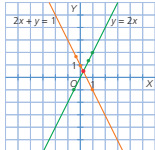
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases}$$

Repite el proceso para representar la recta de las nuevas soluciones.

$$x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = -1 \rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) = -1$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = \sqrt{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	...
y	-1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	2	...



De las infinitas soluciones que tiene cada una de las dos ecuaciones por separado, solo una vale para ambas a la vez: el punto de intersección. El par $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ muestra los resultados. Decimos que este par de números es la **solución** del sistema.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, x e y , está formado por dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

La **solución** es un par de números, (x_0, y_0) , que verifica ambas ecuaciones a la vez.

Actividades

5

1 Estudia si el par $(3, -1)$ es solución de las siguientes ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $x + 3y = 0$	c) $x + 2y = -5$
b) $2x + y = 7$	d) $3x - 5y = 10$

2 Determina los valores de k para que el par $(-2, 5)$ sea solución de estas ecuaciones.

a) $3x + 2y = k$	c) $kx - 3y = -8$
b) $-2x + ky = -1$	d) $-x + \frac{1}{3}y = k$

3 Comprueba si el par $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ es solución de estos sistemas lineales.

a) $\begin{cases} 3x + 6y = -1 \\ x - y = \frac{1}{6} \end{cases}$	b) $\begin{cases} -3x + 2y = -3 \\ 2x + y = \frac{5}{6} \end{cases}$
--	--

4 Averigua los valores de m y n para que el par $(-7, 3)$ sea solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} mx + y = 10 \\ x + ny = -1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} -3x + my = 6 \\ nx + y = 17 \end{cases}$
---	--

5 Copia y completa las tablas con soluciones para cada una de las ecuaciones. Representa el conjunto de todas las soluciones de cada una.

a) $x - 3y = 2$	c) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$
-----------------	------------------------------------

x	5	x	0
y	0	y	0

b) $-x + 5y = 2$	d) $-x + \frac{y}{2} = -\frac{9}{2}$
------------------	--------------------------------------

x	3	x	0
y	0	y	1

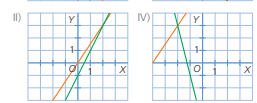
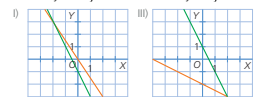
Observa las soluciones e indica cuántos pares de valores hay que buscar como mínimo para poder representar el conjunto de todas las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

6 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -x + 5y = 2 \end{cases}$	b) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2 \\ -x + \frac{y}{2} = -\frac{9}{2} \end{cases}$
--	---

7 Relaciona cada sistema con su gráfica.

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

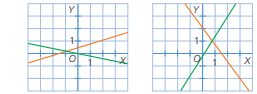


8 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

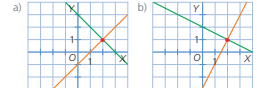
a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 5x - y = -7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$	d) $\begin{cases} x + y = -3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

9 Observa la resolución gráfica de estos sistemas. Explica cómo se podría determinar la solución exacta a partir de la información de la gráfica.

a) $\begin{cases} x + 5y = 0 \\ 3x - 10y = -5 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 8x - 5y = 1 \end{cases}$
--	---



10 Observa las soluciones representadas en estas gráficas e intenta determinar qué sistema resuelven.



Investiga

11 Averigua qué civilizaciones antiguas ya utilizaban sistemas de ecuaciones lineales y cómo los resolvían. Investiga si quedan documentos escritos de ello y, en caso afirmativo, indica de qué tipo son.

Sugerencias didácticas

En este epígrafe repasamos las ecuaciones lineales con dos incógnitas y sus soluciones. Recordamos qué es una solución y cómo representar todas sus soluciones.

Se puede trabajar con los alumnos el hecho de que el conjunto de soluciones, aunque podemos representarlo, es infinito y que con una sola condición no es posible determinar dos números.

Soluciones de las actividades

1 Estudia si el par $(3, -1)$ es solución de las siguientes ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $x + 3y = 0$	b) $2x + y = 7$	c) $-x + 2y = -5$	d) $3x - 5y = 10$
-----------------	-----------------	-------------------	-------------------

a) $3 + 3 \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Es solución.

b) $2 \cdot 3 + (-1) = 5 \neq 7 \rightarrow$ No es solución.

c) $-3 + 2 \cdot (-1) = -5 \rightarrow$ Es solución.

d) $3 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 14 \neq 10 \rightarrow$ No es solución.

2 Determina los valores de k para que el par $(-2, 5)$ sea solución de estas ecuaciones.

a) $3x + 2y = k$

b) $-2x + ky = -1$

c) $kx - 3y = -8$

d) $-x + \frac{1}{3}y = k$

a) $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = k \rightarrow k = 4$

c) $k \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -8 \rightarrow k = -\frac{7}{2}$

b) $-2 \cdot (-2) + k \cdot 5 = -1 \rightarrow k = -1$

d) $-(-2) + \frac{1}{3} \cdot 5 = k \rightarrow k = \frac{11}{3}$

3 Comprueba si el par $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ es solución de estos sistemas lineales.

a) $\begin{cases} 3x + 6y = -1 \\ x - y = \frac{1}{6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 2y = -3 \\ 2x + y = \frac{5}{6} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \\ \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} \neq \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \text{No es solución.}$

b) $\begin{cases} -3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 \\ 2 \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} \end{cases} \rightarrow \text{Es solución.}$

4 Averigua los valores de m y n para que el par $(-7, 3)$ sea solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} mx + y = 10 \\ x + ny = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + my = 6 \\ nx + y = 17 \end{cases}$

a) $\begin{cases} m \cdot (-7) + 3 = 10 \\ -7 + n \cdot 3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3 \cdot (-7) + m \cdot 3 = 6 \\ n \cdot (-7) + 3 = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = -2 \end{cases}$

5 Copia y completa las tablas con soluciones para cada una de las ecuaciones. Representa el conjunto de todas las soluciones de cada una.

a) $x - 3y = 2$

b) $-x + 5y = 2$

c) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$

d) $-x + \frac{y}{2} = -\frac{9}{2}$

Observa las soluciones e indica cuántos pares de valores hay que buscar como mínimo para poder representar el conjunto de todas las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

a)

x	5	2
y	1	0

b)

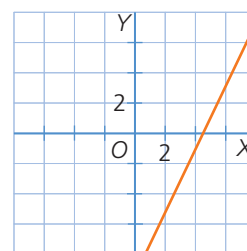
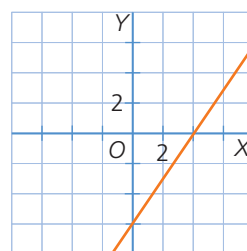
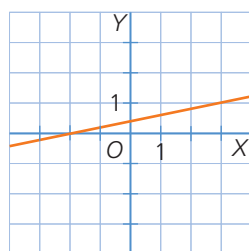
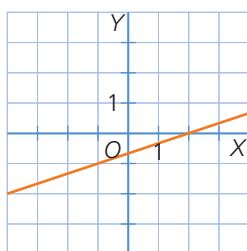
x	3	-2
y	1	0

c)

x	4	0
y	0	-6

d)

x	5	0
y	1	-9

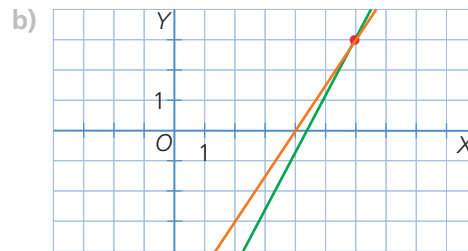
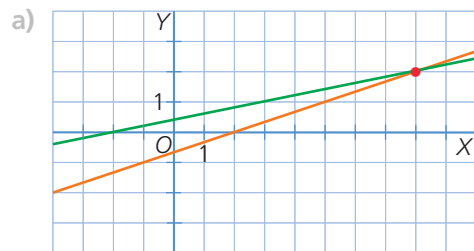


Es suficiente con encontrar dos soluciones de una ecuación para poder representarlas todas.

6 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -x + 5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2 \\ -x + \frac{y}{2} = -\frac{9}{2} \end{cases}$



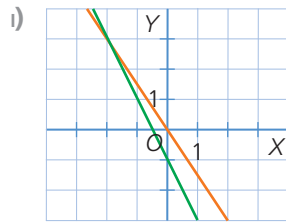
7 Relaciona cada sistema con su gráfica.

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

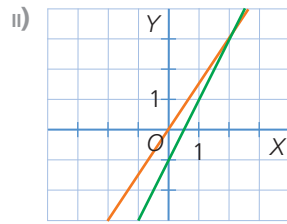
b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$

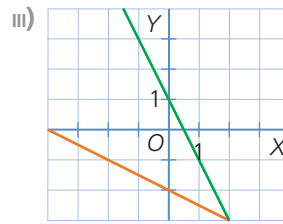
d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$



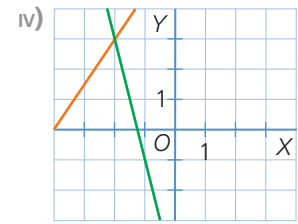
a) I)



b) III)



c) IV)

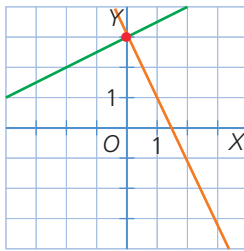


d) II)

8 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

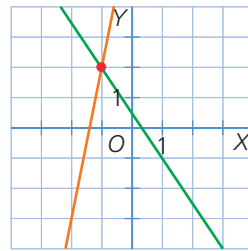
a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$

a) (0, 3)



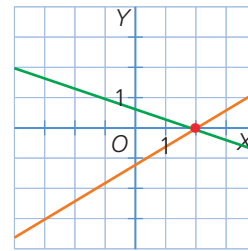
b) $\begin{cases} 5x - y = -7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

b) (-1, 2)



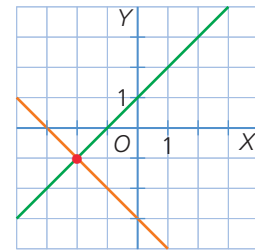
c) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

c) (2, 0)



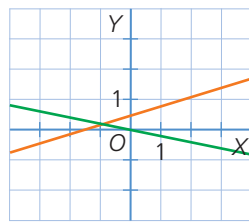
d) $\begin{cases} x + y = -3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

d) (-2, -1)

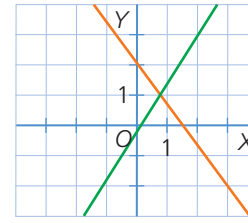


9 Observa la resolución gráfica de estos sistemas. Explica cómo se podría determinar la solución exacta a partir de la información de la gráfica.

a) $\begin{cases} x + 5y = 0 \\ 3x - 10y = -5 \end{cases}$



b) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 8x - 5y = 1 \end{cases}$

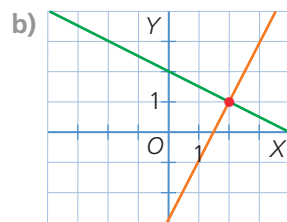
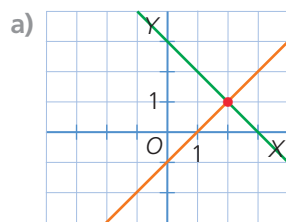


Nos fijamos en la incógnita que tiene un valor entero y despejamos la otra sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones el dato conocido.

a) $\begin{cases} x + 5y = 0 \\ 3x - 10y = -5 \end{cases} \xrightarrow{(-1, y)} -1 + 5y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{5} \rightarrow \left(-1, \frac{1}{5}\right)$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 8x - 5y = 1 \end{cases} \xrightarrow{(x, 1)} 4x + 3 \cdot 1 = 6 \rightarrow x = \frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{3}{4}, 1\right)$

10 Observa las soluciones representadas en estas gráficas e intenta determinar qué sistema resuelven.



a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Investiga

11 Averigua qué civilizaciones antiguas ya utilizaban sistemas de ecuaciones lineales y cómo los resolvían. Investiga si quedan documentos escritos de ello y, en caso afirmativo, indica de qué tipo son.

En el imperio babilónico ya trabajaban con sistemas de ecuaciones. Llamaban a las incógnitas longitud, anchura, área o volumen aunque no tuvieran relación con la geometría. Se conservan documentos escritos en tablillas de arcilla.

Los griegos también resolvían ecuaciones y sistemas utilizando métodos geométricos.

También existen documentos de la matemática india en los que aparecen problemas resolubles aplicando sistemas. Solo resuelven sistemas especiales, sin generalizar.

El libro "Chui-chang suan-shu" o los "Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático" del s. III a.C. contiene problemas sobre agromensura, ingeniería, impuestos, ecuaciones... donde también se resuelven sistemas de ecuaciones lineales.

2. Número de soluciones de un sistema

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones



Aprenderás a...

- Identificar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas compatibles e incompatibles.
- Determinar si un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas compatible es determinado o indeterminado.



Lenguaje matemático

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se generaliza:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Es compatible determinado si:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Es compatible indeterminado si:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

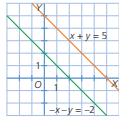
Es incompatible si:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

2. NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA

Julia le propone un problema a Arantxa: Encuentra dos números que sumen 5 y cuyos productos sumen -2 . Arantxa escribe el sistema que expresa ambas condiciones y representa gráficamente el conjunto de soluciones de cada una.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$



Al representar las soluciones de cada ecuación, Arantxa obtiene dos rectas paralelas. Se fija que los coeficientes cumplen esta condición:

$$\frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{5}{-2}$$

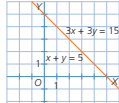
No hay ningún punto cuyas coordenadas cumplan ambas condiciones a la vez. Por tanto, el sistema no tiene solución. Decimos que es incompatible.

Arantxa le dice que con esas condiciones no puede encontrar los números y pide que cambie la segunda pista. Julia le propone entonces:

Dos números cuyos triples sumen 15.

Arantxa escribe el nuevo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$



Al resolverlo, observa que las infinitas soluciones de la segunda ecuación coinciden con las de la primera.

En este caso, los coeficientes cumplen:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$$

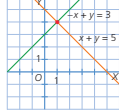
El sistema es compatible porque tiene solución, pero es indeterminado porque podemos encontrar más de una.

Por último, Julia le plantea a Arantxa una tercera condición:

La diferencia entre el segundo número y el primero es 3.

De este modo, Arantxa plantea este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$



Al representar los puntos de la segunda recta, observa que corta a la primera en un solo punto. Al fijarse en los coeficientes del sistema, comprueba que:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Hay, pues, solución y es única, por lo que el sistema es compatible y determinado. La solución son los números 1 y 4.

Según el número de soluciones, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede ser:

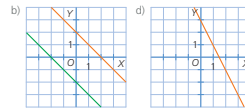
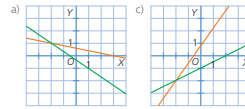
- Incompatible** si el sistema no tiene solución. Gráficamente se obtienen dos rectas paralelas.
- Compatible indeterminado** si el sistema tiene infinitas soluciones. El resultado gráfico son dos rectas coincidentes.
- Compatible determinado** si existe una solución única. Se obtienen dos rectas secantes, y la solución son las coordenadas del punto de intersección.

Actividades

12 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos según sus soluciones.

- a) $\begin{cases} 10x + 5y = 15 \\ -6x - 3y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -x + y = 7 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} 12x - 18y = 6 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$

13 Clasifica estos sistemas según sus soluciones y relacionálos con su expresión algebraica.



- i) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} -7x + 5y = 4 \\ -\frac{x}{2} + y = -1 \end{cases}$
 ii) $\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{5y}{3} = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Escribe la solución de los que sean compatibles determinados.

14 Escribe una segunda ecuación para que el sistema sea compatible determinado con la solución indicada.

- a) $\begin{cases} -4x + y = -11 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$ Solución (2, -3)
 b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$ Solución (-1, 1)
 c) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$ Solución $(-\frac{2}{3}, 2)$

Comprueba que los coeficientes de x e y no son proporcionales.

15 Representa el conjunto de soluciones de la ecuación $5x + 2y = -3$ y traza otra recta de modo que el sistema obtenido sea:

- a) Compatible determinado.
 b) Compatible indeterminado.
 c) Incompatible.

Escribe la ecuación de cada una de esas rectas y observa que relación hay entre los coeficientes de la ecuación original y la añadida.

16 Clasifica de forma razonada los siguientes sistemas según su número de soluciones sin resolverlos previamente.

- a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ -3x + 3y = -18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 5x + 5y = 30 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 6 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

17 Copia y completa el sistema: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$ de modo que:

- a) Tenga infinitas soluciones.
 b) Tenga una solución única.
 c) No tenga solución.
 Compruébalo gráficamente.

18 Dado el sistema: $\begin{cases} kx - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 3 \end{cases}$

determina, si es posible, para qué valores de k se obtiene un sistema:

- a) Incompatible.
 b) Compatible indeterminado.
 c) Compatible determinado.
 Resuélvelo gráficamente cuando sea posible.

19 Halla k para que el sistema: $\begin{cases} 10x - 6y = 4 \\ -15x + 9y = k \end{cases}$

- a) Tenga infinitas soluciones.
 b) No tenga solución.
 c) Tenga solución única.

DESAFIO

20 Considera los sistemas:

- a) $\begin{cases} mx - 3y = 2 \\ -x + 6y = n \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx - 4y = n \\ -9x + my = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx - y = 3 \\ x + my = n \end{cases}$

Determina, si es posible, los valores de m y n de modo que:

- Tengan infinitas soluciones. ■ No tengan solución. ■ Tengan solución única.

Sugerencias didácticas

Aprovechando la resolución gráfica estudiamos en este epígrafe la clasificación de sistemas según su número de soluciones. Los alumnos han de relacionar la expresión analítica con el tipo de sistema atendiendo a sus coeficientes.

Se proponen varios ejercicios para que representen cada una de las ecuaciones y constaten qué ocurre. Sería recomendable

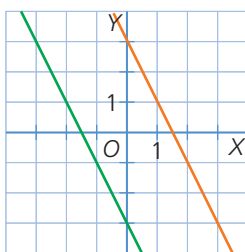
que probasen en cada caso con las soluciones de una de las ecuaciones en la otra y vean qué pasa.

Como en el epígrafe anterior, construir con GeoGebra un sistema general y ver qué ocurre según vamos modificando sus coeficientes puede ayudar a ver qué está pasando.

Soluciones de las actividades

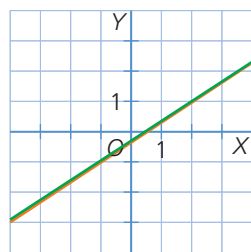
12 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos según sus soluciones.

a) $\begin{cases} 10x + 5y = 15 \\ -6x - 3y = 9 \end{cases}$



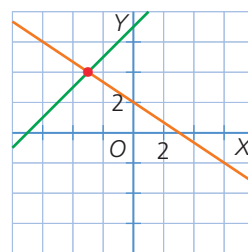
Incompatible

b) $\begin{cases} 12x - 18y = 6 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}$



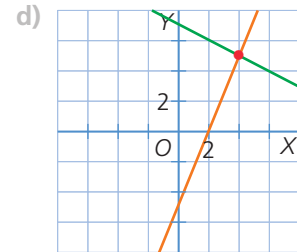
Compatible indeterminado

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -x + y = 7 \end{cases}$



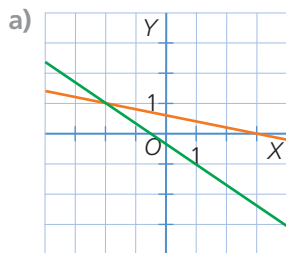
Compatible determinado

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$

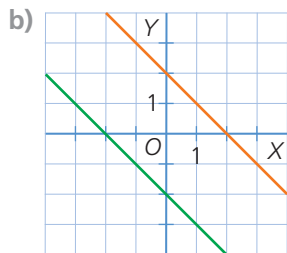


Compatible determinado

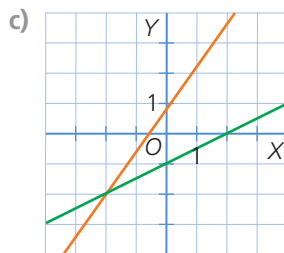
13 Clasifica estos sistemas según sus soluciones y relaciónalos con su expresión algebraica.



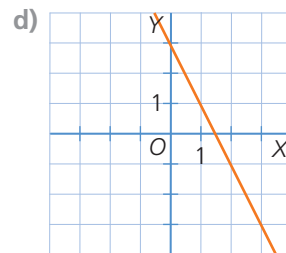
$$\text{i) } \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$$



$$\text{ii) } \begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$



$$\text{iii) } \begin{cases} -7x + 5y = 4 \\ \frac{-x}{2} + y = -1 \end{cases}$$



$$\text{iv) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{5y}{3} = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

Escribe la solución de los que sean compatibles determinados.

a) IV) Sistema compatible determinado: $(-2, 1)$

c) III) Sistema compatible determinado: $(-2, -2)$

b) I) Sistema incompatible

d) II) Sistema compatible indeterminado

14 Escribe una segunda ecuación para que el sistema sea compatible determinado con la solución indicada.

a) $\begin{cases} -4x + y = -11 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$ Solución $(2, -3)$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$ Solución $(-1, 1)$

c) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$ Solución $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

Comprueba que los coeficientes de x e y no son proporcionales.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} -4x + y = -11 \\ x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$

15 Representa el conjunto de soluciones de la ecuación $5x + 2y = -3$ y traza otra recta de modo que el sistema obtenido sea:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

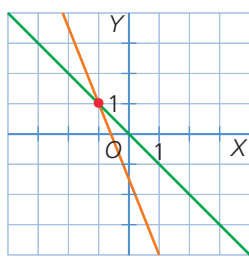
c) Incompatible.

Escribe la ecuación de cada una de esas rectas y observa qué relación hay entre los coeficientes de la ecuación original y la añadida.

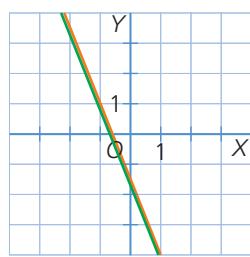
a) $\begin{cases} 5x + 2y = -3 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow (-1, 1)$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = -3 \\ 10x + 4y = -6 \end{cases}$

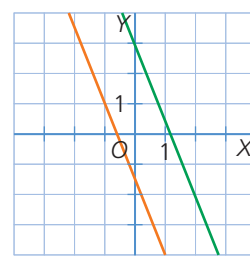
c) $\begin{cases} 5x + 2y = -3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$



$$\frac{5}{1} \neq \frac{2}{1}$$



$$\frac{5}{10} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$$



$$\frac{5}{5} = \frac{2}{2} \neq \frac{-3}{6}$$

16 Clasifica de forma razonada los siguientes sistemas según su número de soluciones sin resolverlos previamente.

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ -3x + 3y = -18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 5x + 5y = 30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

a) $\frac{1}{-3} \neq \frac{1}{3} \rightarrow$ Compatible determinado

d) $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{6}{30} \rightarrow$ Compatible indeterminado

b) $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \rightarrow$ Compatible determinado

e) $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow$ Compatible determinado

c) $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{6}{2} \rightarrow$ Incompatible

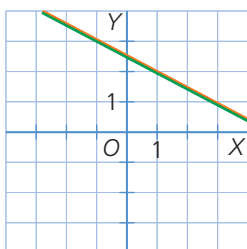
f) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12} \rightarrow$ Compatible indeterminado

17 Copia y completa el sistema: $\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ \square x + \square y = \square \end{array} \right\}$ de modo que:

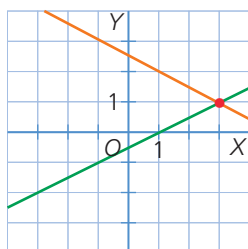
- a) Tenga infinitas soluciones. b) Tenga una solución única. c) No tenga solución.
Compruébalo gráficamente.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

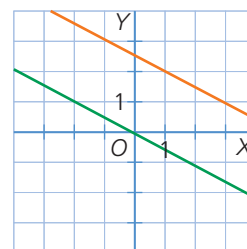
a) $\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ -x - 2y = -5 \end{array} \right\}$



b) $\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{array} \right\}$



c) $\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\}$



18 Dado el sistema: $\left. \begin{array}{l} kx - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 3 \end{array} \right\}$ determina, si es posible, para qué valores de k se obtiene un sistema:

- a) Incompatible. b) Compatible indeterminado. c) Compatible determinado.

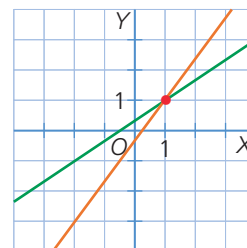
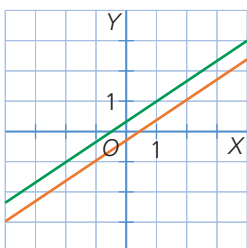
Resuélvelo gráficamente en los casos en que sea posible.

a) $\frac{k}{-6} = \frac{-3}{9} \neq \frac{1}{3} \rightarrow k \neq 2$

b) $\frac{-3}{9} \neq \frac{1}{3} \rightarrow$ No es posible.

c) $\frac{k}{-6} \neq \frac{-3}{9} \rightarrow k \neq 2$

Por ejemplo, $k = 4$.



19 Halla k para que el sistema $\left. \begin{array}{l} 10x - 6y = 4 \\ -15x + 9y = k \end{array} \right\}$:

- a) Tenga infinitas soluciones. b) No tenga solución. c) Tenga solución única.
a) $\frac{10}{-15} = \frac{-6}{9} = \frac{4}{k} \rightarrow k = -6$ b) $\frac{10}{-15} = \frac{-6}{9} \neq \frac{4}{k} \rightarrow k \neq -6$ c) $\frac{10}{-15} = \frac{-6}{9}$ No es posible.

Desafío

20 Considera los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} mx - 3y = 2 \\ -x + 6y = n \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx - 4y = n \\ -9x + my = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} mx - y = 3 \\ x + my = n \end{cases}$$

Determina, si es posible, los valores de m y n de modo que:

- Tengan infinitas soluciones.
- No tengan solución.
- Tengan solución única.

$$\text{a) } \begin{cases} mx - 3y = 2 \\ -x + 6y = n \end{cases}$$

$$\text{Compatible indeterminado} \rightarrow \frac{m}{-1} = \frac{-3}{6} = \frac{2}{n} \rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ y } n = -4$$

$$\text{Incompatible} \rightarrow \frac{m}{-1} = \frac{-3}{6} \neq \frac{2}{n} \rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ y } n \neq -4$$

$$\text{Compatible determinado} \rightarrow \frac{m}{-1} \neq \frac{-3}{6} \rightarrow m \neq \frac{1}{2} \text{ y } n \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx - 4y = n \\ -9x + my = 3 \end{cases}$$

$$\text{Compatible indeterminado} \rightarrow \frac{m}{-9} = \frac{-4}{m} = \frac{n}{3} \rightarrow m = 6 \text{ y } n = -2, m = -6 \text{ y } n = 2$$

$$\text{Incompatible} \rightarrow \frac{m}{-9} = \frac{-4}{m} \neq \frac{n}{3} \rightarrow m = 6 \text{ y } n \neq -2, m = -6 \text{ y } n \neq 2$$

$$\text{Compatible determinado} \rightarrow \frac{m}{-9} \neq \frac{-4}{m} \rightarrow m \neq \pm 6 \text{ y } n \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \begin{cases} mx - y = 3 \\ x + my = n \end{cases}$$

$$\text{Compatible indeterminado} \rightarrow \frac{m}{1} = \frac{-1}{m} = \frac{3}{n} \rightarrow m^2 \neq -1 \rightarrow \text{No es posible.}$$

$$\text{Incompatible} \rightarrow \frac{m}{1} = \frac{-1}{m} \neq \frac{3}{n} \rightarrow m^2 \neq -1 \rightarrow \text{No es posible.}$$

$$\text{Compatible determinado} \rightarrow \frac{m}{1} \neq \frac{-1}{m} \rightarrow m \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{R}$$

3. Métodos de sustitución y de igualación

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones

Aprenderás a...

- Resolver sistemas lineales por los métodos de sustitución e igualación.
- Aplicar los sistemas de ecuaciones lineales y los métodos de sustitución e igualación a la resolución de problemas.

Lenguaje matemático

La solución de un sistema compatible determinado es única.

Se puede expresar:

- Como un par: (x_0, y_0)
- Dando el valor de cada incógnita por separado: $x = x_0$, $y = y_0$

Presta atención

No importa por qué método resolvamos un sistema; la solución obtenida será la misma.

3. MÉTODOS DE SUSTITUCIÓN Y DE IGUALACIÓN

Blanca y Manuel han comprado bocadillos y bebidas para ellos y sus amigos.

Blanca ha pagado 18 € por cuatro bocadillos y seis bebidas.

Manuel ha comprado dos bocadillos y una bebida por 6 €.

Ninguno de los dos se ha fijado en el precio de cada artículo y ahora no saben cuánto dinero tienen que pedir a los demás.

Para averiguar los precios, plantean una ecuación con cada tique, para lo que llaman x al precio de un bocadillo y y al de una bebida.



Cuatro bocadillos y seis bebidas cuestan 18 €: $4x + 6y = 18$
 Dos bocadillos y una bebida cuestan 6 €: $2x + y = 6$

Blanca decide resolver el sistema por **sustitución**. Para ello:

- Despeja una incógnita, y , en la segunda ecuación y sustituye su valor en la primera.
 $y = 6 - 2x \rightarrow 4x + 6 \cdot (6 - 2x) = 18$
- Resuelve la ecuación resultante para obtener el valor de x .
 $4x + 36 - 12x = 18 \rightarrow 18 = 8x \rightarrow x = \frac{18}{8} \rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25$
- Sustituye ese valor en la otra ecuación y consigue el valor de y .
 $y = 6 - 2 \cdot \frac{9}{4} \rightarrow y = 6 - \frac{9}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2} = 1,50$

El **método de sustitución** consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra.

Manuel prefiere resolverlo por **igualación** del siguiente modo:

- Despeja el valor de una de las incógnitas, y , en ambas ecuaciones e iguala las dos expresiones resultantes.
 $y = 6 - 2x$
 $y = \frac{18 - 4x}{6} \rightarrow 6 - 2x = \frac{18 - 4x}{6}$
- Resuelve la ecuación obtenida para obtener el valor de x .
 $6 \cdot (6 - 2x) = 18 - 4x \rightarrow x = \frac{18}{8} \rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25$
- Sustituye ese valor en una ecuación y consigue el valor de y .
 $y = 6 - 2 \cdot \frac{9}{4} \rightarrow y = 6 - \frac{9}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2} = 1,50$

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema e igualar las expresiones obtenidas.

Por ambos métodos, los dos amigos han llegado al mismo resultado:

$(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}) = (2,25; 1,50)$

Así, el precio de un bocadillo es 2,25 €, mientras que una bebida cuesta 1,50 €.

5 **Actividades**

- 21 Resuelve por el método de sustitución.
- a) $2x + y = -1$
 $-10x + 7y = 11$
- b) $-x + 6y = -7$
 $2x + 3y = 4$
- c) $4x - 5y = -12$
 $-3x + 2y = 9$
- d) $5x + 2y = 1$
 $2x - 3y = 8$
- 22 Averigua las soluciones de estos sistemas por el método de igualación.
- a) $4x + y = 2$
 $-x + y = -1$
- b) $x + y = 0$
 $3x + 5y = 1$
- c) $x + y = 0$
 $3x + 5y = 1$
- d) $3x + 2y = 8$
 $7x + 3y = 7$
- 23 Resuelve aplicando el método de sustitución como en el ejercicio resuelto.
- a) $2x - 5y = 3$
 $2x + y = 1$
- b) $\frac{1}{2}x + 2y = -4$
 $-\frac{1}{2}x - 3y = 7$
- 24 Aplica el método de igualación como en el ejercicio resuelto.
- a) $4x - 5y = 4$
 $3x + 5y = -2$
- b) $\frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y = \frac{5}{2}$
 $\frac{3}{5}x + \frac{4}{3}y = \frac{17}{5}$
- 25 Simplifica estos sistemas y resuélvelos por sustitución.
- a) $3 \cdot (x - 2) - 4y = y + 2x + 5$
 $5x + 2 = 9 + 2 \cdot (1 + y)$
- b) $4 - 3 \cdot (3 - 2y) + 4x = 3y - x$
 $\frac{2x - 3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{4 - y}{2} + \frac{x}{5}$
- c) $\frac{2x - y}{3} - 2 \cdot (1 + y) = 1$
 $5 \cdot (y - 3) - \frac{x + 2}{3} = -21$
- 26 Aplica el método de igualación para resolver los siguientes sistemas después de reducirlos.
- a) $x - 3 \cdot (y - 7) = 7 - (y - 5x)$
 $2y + 3 = y - 3 \cdot (1 - x) - 2$
- b) $2x - 3 \cdot \frac{y + 2}{4} = y + \frac{x - 2}{2}$
 $9y - 3x + 2 = 3 \cdot (1 - 2x) + y$
- c) $\frac{7}{2} \cdot \frac{3 \cdot (x - 2)}{4} = \frac{5 \cdot (y + 4)}{6}$
 $9 - 5 \cdot (x + 3) + \frac{2 \cdot (y + 7)}{3} = 0$
- 27 En una granja avícola se ha envasado hoy una producción de 1380 huevos en 140 hueras de una docena y media docena. ¿Cuántas hueras se han utilizado de cada tipo?
- 28 Si se suman tres chicos más al grupo de trabajo de Valentina, habría el doble de chicos que de chicas. Sin embargo, si hubiese tres chicos menos, estos serían la mitad que las chicas. ¿Cuántos chicos y chicas son?

EJERCICIO RESUELTO

Resuelve por el método que se indica.

a) **Sustitución**
 $3x + 4y = -5$
 $3x - 2y = 7$

b) **Igualación**
 $5x - 3y = 12$
 $2x + 3y = 9$

Solución

a) Como los coeficientes de x son iguales, despejamos $3x$ en la segunda ecuación.
 $3x + 4y = -5$
 $3x - 2y = 7 \rightarrow 3x = 7 + 2y$

A continuación, sustituimos el resultado en la primera: $3x + 4y = -5 \rightarrow (7 + 2y) + 4y = -5$
 Y resolvemos la ecuación obtenida.
 $6y = -5 - 7 \rightarrow 6y = -12 \rightarrow y = -2$

Hallamos el valor de x .
 $3x = 7 + 2y \rightarrow 3x = 7 + 2 \cdot (-2) \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$
 La solución es el par $(1, -2)$.

b) Como los coeficientes de y son opuestos, despejamos $3y$ en ambas expresiones. Las igualamos y resolvemos.
 $5x - 3y = 12 \rightarrow 5x - 12 = 3y$
 $2x + 3y = 9 \rightarrow 3y = 9 - 2x$

$5x - 12 = 9 - 2x \rightarrow 7x = 21 \rightarrow x = 3$

Sustituimos para hallar el valor de y .
 $3y = 5x - 12 \rightarrow 3y = 5 \cdot 3 - 12 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$
 La solución es el par $(3, 1)$.

DESAFÍO

- 29 Resuelve por sustitución y clasifica el sistema según el número de soluciones. Razona tu respuesta.
- a) $2x - y = 3$
 $-6x + 3y = 5$
- b) $x - 2y = 6$
 $-2x + 4y = -12$

Sugerencias didácticas

Empezamos el repaso de los métodos de resolución de sistemas lineales con dos incógnitas por los dos métodos más parecidos: sustitución e igualación. Los alumnos de este nivel ya no deberían tener dificultades con estos métodos. Se les puede pedir que sean ellos los que expliquen el procedimiento

y analicen las ventajas de la propuesta del ejercicio resuelto para simplificar los cálculos en algunos sistemas.

Después de revisar ambos métodos el Desafío puede ser útil para que revisen el proceso y argumenten qué está ocurriendo.

Soluciones de las actividades

21 Resuelve por el método de sustitución.

- a) $2x + y = -1$
 $-10x + 7y = 11$
- b) $-x + 6y = -7$
 $2x + 3y = 4$
- c) $4x - 5y = -12$
 $-3x + 2y = 9$
- d) $5x + 2y = 1$
 $2x - 3y = 8$
- a) $y = -1 - 2x$
 $-10x + 7y = 11 \rightarrow -10x + 7 \cdot (-1 - 2x) = 11 \rightarrow x = -\frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow (-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$
- b) $6y + 7 = x$
 $2x + 3y = 4 \rightarrow 2 \cdot (6y + 7) + 3y = 4 \rightarrow y = -\frac{2}{3} \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, -\frac{2}{3})$
- c) $x = \frac{-12 + 5y}{4}$
 $-3x + 2y = 9 \rightarrow -3 \cdot (\frac{-12 + 5y}{4}) + 2y = 9 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- d) $x = \frac{1 - 2y}{5}$
 $2x - 3y = 8 \rightarrow 2 \cdot (\frac{1 - 2y}{5}) - 3y = 8 \rightarrow y = -2 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, -2)$

22) Averigua las soluciones de estos sistemas por el método de igualación.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 4x + y = 2 \\ -x + y = -1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + 3y = 14 \\ -x + y = 2 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 7x + 3y = 7 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = 2 - 4x \\ y = -1 + x \end{cases} \rightarrow 2 - 4x = -1 + x \rightarrow x = \frac{3}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5} \rightarrow \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 14 - 3y \\ y - 2 = x \end{cases} \rightarrow 14 - 3y = y - 2 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 4)$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = -y \\ x = \frac{1-5y}{3} \end{cases} \rightarrow -y = \frac{1-5y}{3} \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = \frac{8-2y}{3} \\ x = \frac{7-3y}{7} \end{cases} \rightarrow \frac{8-2y}{3} = \frac{7-3y}{7} \rightarrow y = 7 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 7)$$

23) Resuelve aplicando el método de sustitución como en el ejercicio resuelto:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x = 3 + 5y \\ 2x + y = 1 \end{cases} \rightarrow (3 + 5y) + y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) & \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = -4 \\ -\frac{1}{2}x - 3y = 7 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{2}x = -4 - 2y \\ -\frac{1}{2}x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow -(-4 - 2y) - 3y = 7 \rightarrow y = -3 \rightarrow x = 4 \rightarrow (4, -3)$$

24) Aplica el método de igualación como en el ejercicio resuelto.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 4x - 5y = 4 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{3}y = \frac{17}{5} \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 4 = 5y \\ 5y = -2 - 3x \end{cases} \rightarrow 4x - 4 = -2 - 3x \rightarrow x = \frac{2}{7} \rightarrow y = -\frac{4}{7} \rightarrow \left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{4}{3}y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x \\ \frac{4}{3}y = \frac{17}{5} - \frac{3}{5}x \end{cases} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x = \frac{17}{5} - \frac{3}{5}x \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 3 \rightarrow (-1, 3)$$

25) Simplifica estos sistemas y resuélvelos por sustitución.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 3 \cdot (x - 2) - 4y = y + 2x + 5 \\ 5x + 2 = 9 + 2 \cdot (1 + y) \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 4 - 3 \cdot (3 - 2y) + 4x = 3y - x \\ \frac{2x - 3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4 - y}{2} + \frac{x}{5} \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \frac{2x - y}{3} - 2 \cdot (1 + y) = 1 \\ 5 \cdot (y - 3) - \frac{x + 2}{3} = -21 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - 5y = 11 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 11 + 5y \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} \rightarrow 5 \cdot (11 + 5y) - 2y = 9 \rightarrow y = -2 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, -2)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{21}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 3y}{5} \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{21}{10} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5 - 3y}{5}\right) + \frac{1}{2}y = \frac{21}{10} \rightarrow y = 5 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 5)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y = 3 \\ -\frac{1}{3}x + 5y = -\frac{20}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 7y = 9 \\ x = 15y + 20 \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot (15y + 20) - 7y = 9 \rightarrow y = -\frac{31}{23} \rightarrow x = -\frac{5}{23} \rightarrow \left(-\frac{5}{23}, -\frac{31}{23} \right)$$

26 Utiliza el método de igualación para resolver los siguientes sistemas después de reducirlos.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 3 \cdot (y - 7) = 7 - (y - 5x) \\ 2y + 3 = y - 3 \cdot (1 - x) - 2 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3 \cdot \frac{y+2}{4} = y + \frac{x-2}{2} \\ 9y - 3x + 2 = 3 \cdot (1 - 2x) + y \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{7}{2} - \frac{3 \cdot (x-2)}{4} = \frac{5 \cdot (y+4)}{6} \\ 9 - 5 \cdot (x+3) + \frac{2 \cdot (y+7)}{3} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 14 \\ -3x + y = -8 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{14 - 4x}{2} \\ y = -8 + 3x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{14 - 4x}{2} = -8 + 3x \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 1 \rightarrow (3, 1)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}y = \frac{1}{2} \\ 3x + 8y = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 4} \left. \begin{array}{l} 6x - 7y = 2 \\ 3x + 8y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{2+7y}{6} \\ x = \frac{1-8y}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2+7y}{6} = \frac{1-8y}{3} \rightarrow y = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y = \frac{5}{3} \\ -5x + \frac{2}{3}y = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 9x + 10y = 20 \\ -15x + 2y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{20-9x}{10} \\ y = \frac{4+15x}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{20-9x}{10} = \frac{4+15x}{2} \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$$

27 En una granja avícola se ha envasado hoy una producción de 1 380 huevos en 140 hueveras de una docena y media docena. ¿Cuántas hueveras se han utilizado de cada tipo?

Si llamamos x al número de hueveras de una docena e y al de media docena obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \text{Número de huevos: } 12x + 6y = 1380 \\ \text{Número de hueveras: } x + y = 140 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \cdot 6 \\ \cdot 6 \end{array} \right. \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 230 \\ x + y = 140 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 230 \\ y = 140 - x \end{array} \right\} \rightarrow 2x + (140 - x) = 230 \rightarrow x = 90 \rightarrow y = 50$$

Se han utilizado 90 hueveras de una docena y 50 de media docena.

28 Si se sumasen tres chicos más al grupo de trabajo de Valentina, habría el doble de chicos que de chicas. Sin embargo, si hubiese tres chicos menos, estos serían la mitad que las chicas. ¿Cuántos chicos y chicas son?

Si llamamos x al número de chicos e y al número de chicas, obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \text{Con tres chicos más: } x + 3 = 2y \\ \text{Con tres chicos menos: } x - 3 = \frac{y}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array} \right. \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 2x - y = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -3 + 2y \\ 2x - y = 6 \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot (-3 + 2y) - y = 6 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 5$$

Son 5 chicos y 4 chicas.

Desafío

29 Resuelve por sustitución y clasifica el sistema según el número de soluciones. Razona tu respuesta.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = 5 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - 2y = 6 \\ -2x + 4y = -12 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3 = y \\ -6x + 3y = 5 \end{array} \right\} \rightarrow -6x + 3 \cdot (2x - 3) = 5 \rightarrow -6x + 6x = 5 + 9 \rightarrow 0 \cdot x = 14$$

Sistema incompatible. No tiene solución porque no hay ningún valor de x e y que hagan que esa igualdad sea cierta.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x = 6 + 2y \\ -2x + 4y = -12 \end{array} \right\} \rightarrow -2 \cdot (6 + 2y) + 4y = -12 \rightarrow -4y + 4y = -12 + 12 \rightarrow 0 \cdot x = 0$$

Sistema compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones porque la igualdad es cierta para cualesquiera valores de x e y .

4. Método de reducción

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones



Aprenderás a...

- Resolver sistemas lineales por el método de reducción.
- Aplicar los sistemas de ecuaciones lineales y el método de reducción a la resolución de problemas.

4. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Concha acompaña a un grupo de alumnos a una exposición y tiene que pagar las entradas. Las hay de dos tipos: normal y de precio reducido (para los que se han acordado de traer el carnet de estudiante), pero no tiene anotados los precios.

Mirando los tickets de dos visitas anteriores, encuentra que un día pagó 31,50 € por ocho entradas, de las cuales solo tres eran normales; en otra ocasión desembolsó 39,50 € por nueve entradas, cuatro de ellas de precio reducido.

Concha plantea dos ecuaciones con las incógnitas, en las que x es el precio de la entrada reducida, e y , el precio de la entrada normal.

$$\begin{aligned} \text{Día 1: } 5 \text{ reducidas y } 3 \text{ normales} &\rightarrow 5x + 3y = 31,5 \\ \text{Día 2: } 4 \text{ reducidas y } 5 \text{ normales} &\rightarrow 4x + 5y = 39,5 \end{aligned}$$

Para resolver el sistema por **reducción**, Concha procede del siguiente modo:

- Multiplica ambas ecuaciones por la cantidad necesaria para conseguir otras equivalentes con los coeficientes de una de las dos incógnitas opuestos.

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 31,5 & \cdot 4 & \rightarrow 20x + 12y = 126 \\ 4x + 5y &= 39,5 & \cdot (-5) & \rightarrow -20x - 25y = -197,5 \end{aligned}$$

- Suma las dos ecuaciones equivalentes y resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} 20x + 12y &= 126 \\ -20x - 25y &= -197,5 & \rightarrow y &= \frac{-71,5}{-13} = 5,5 \end{aligned}$$

- Halla el valor de la otra incógnita sustituyendo la solución obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

$$5x + 3 \cdot 5,5 = 31,5 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 3$$

La solución es (3; 5,5). Así, la entrada reducida cuesta 3 €, y la normal, 5,50 €.

El **método de reducción** consiste en hallar un sistema de ecuaciones lineales equivalente, una de cuyas incógnitas tenga coeficientes opuestos, de modo que, al sumar ambas ecuaciones, resulte una única ecuación con una sola incógnita.



Recuerda

Si multiplicamos una ecuación por un número distinto de cero, la ecuación obtenida es equivalente a la anterior, es decir, ambas tienen las mismas soluciones.



EJERCICIO RESUELTO

Determina por reducción las soluciones de los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} 10x + 6y = -4 \\ -15x - 9y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Solución

Para resolver estos sistemas, llamamos E_1 a la primera ecuación y E_2 a la segunda.

$$\begin{aligned} \text{a) } E_1 \cdot 3 &\rightarrow 30x + 18y = -12 \\ E_2 \cdot 2 &\rightarrow -30x - 18y = 12 \\ \hline &0 = 0 \end{aligned}$$

Compatible indeterminado.
Tiene infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} \text{b) } E_1 \cdot 2 &\rightarrow 6x - 4y = 2 \\ &\quad -6x + 4y = 2 \\ \hline &0 = 4 \end{aligned}$$

Sistema incompatible.
No tiene solución.

$$\begin{aligned} \text{c) } E_1 \cdot (-2) &\rightarrow -4x + 2y = -6 \\ E_2 &\rightarrow 2x + y = 3 \\ \hline &-2x + y = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-2x + y = -9 \\ &2x + y = 3 \\ \hline &y = 1 \end{aligned}$$

$$2x - 1 = 3 \rightarrow x = 2$$

102

Actividades

5

- 30 Resuelve aplicando el método de reducción.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 11x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 18 \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 7x + 9y = 13 \\ 7x - 6y = 3 \end{cases} & \quad \text{e) } \begin{cases} 7x + 5y = -2 \\ 21x + 13y = -4 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 5x + 3y = -9 \\ x - 4y = -11 \end{cases} & \quad \text{f) } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$



EJERCICIO RESUELTO

Considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -4x + 5y = 3 \\ 6x + 7y = 10 \end{cases}$$

Resuélvelo aplicando reducción dos veces.

Solución

Aplicamos el método de reducción para averiguar el valor de y :

$$\begin{aligned} (-4x + 5y = 3) \cdot 3 &\rightarrow -12x + 15y = 9 \\ (6x + 7y = 10) \cdot 2 &\rightarrow 12x + 14y = 20 \\ \hline &29y = 29 \rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Lo volvemos a aplicar para obtener x :

$$\begin{aligned} (-4x + 5y = 3) \cdot (-7) &\rightarrow 28x - 35y = -21 \\ (6x + 7y = 10) \cdot 5 &\rightarrow 30x + 35y = 50 \\ \hline 58x &= 29 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es solución el par: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

- 31 Calcula las soluciones de los sistemas siguientes aplicando dos veces el método de reducción.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 10x + 9y = 9 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -x + 9y = 18 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 7x + 3y = -5 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases} & \quad \text{e) } \begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ -3x + 4y = 31 \end{cases} & \quad \text{f) } \begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

- 32 Resuelve por el método de reducción.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 3 \cdot (2x + y) - 1 = 5x \\ 2 + 5(x + 1) = -3y \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x - 7 \cdot (2 + y) = 1 \\ 2 \cdot (3x + y) - 3 = x + y \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 9 - 5 \cdot (x + 2) = -1 - 3y \\ 3x - 4y = -1 - 5 \cdot (y - x) \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} 3x - (2 - y) + 1 = 7 - 2 \cdot (3 - x) \\ 17 - 2 \cdot (x + 1) = 1 - 3y \end{cases} \end{aligned}$$

- 33 Simplifica y resuelve por reducción.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y}{2} = \frac{17}{6} \\ \frac{3x-1}{2} + y = 0 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{y+1}{10} = \frac{1}{5} \\ \frac{x-3}{6} - \frac{2y}{9} = \frac{8}{9} \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} \frac{3 \cdot (2x-1)}{5} - \frac{3 \cdot (y+1)}{2} = -3 \\ \frac{5-3x}{4} + \frac{5 \cdot (x+y)}{3} = 9 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} \frac{9-6 \cdot (x+1)}{7} - y = \frac{-2}{7} \\ \frac{3y-x}{2} - \frac{5y}{3} = \frac{5}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

- 34 Elena recibió el mes pasado un pedido de 7 paquetes de bolígrafos azules y 6 rojos que hacían un total de 60 unidades. Este mes han llegado 5 paquetes de azules y 3 de rojos, con un total de 39 unidades. ¿Cuántos bolígrafos contiene cada paquete?



DESAFÍO

- 35 Resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 7x + 9y = 11 \end{cases} & \quad \text{c) } \begin{cases} x + 4y = 7 \\ 10x + 13y = 16 \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} x + 5y = 9 \\ 13x + 17y = 21 \end{cases} \end{aligned}$$

- Observa los sistemas propuestos. ¿Cómo son sus coeficientes?
- Analiza las soluciones, ¿cómo son? ¿Cuánto suma el par de números? Generaliza el resultado.

103

Sugerencias didácticas

Para terminar el estudio de los sistemas lineales repasamos el método de reducción. Es el más breve y el que más utilizarán en cursos posteriores para resolver sistemas lineales. En el ejercicio resuelto se plantea una modificación del método aplicándolo dos veces para evitar la sustitución.

Al igual que en los otros métodos podríamos pedirles que recuerden el método que ya conocen y analicen la doble reducción y sean ellos quienes se lo muestren al grupo. Explicarlo y discutir si tiene o no ventajas puede ayudar a asimilar el método y detectar errores.

Soluciones de las actividades

- 30 Resuelve aplicando el método de reducción.

$$\text{a) } \begin{cases} 11x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 18 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 3y = -9 \\ x - 4y = -11 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 7x + 5y = -2 \\ 21x + 13y = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7x + 9y = 13 \\ 7x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 11x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 18 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 16x = 32 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -4 \rightarrow (2, -4)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7x + 9y = 13 \\ 7x - 6y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{cases} 7x + 9y = 13 \\ -7x + 6y = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 15y = 10 \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow x = 1 \rightarrow \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 3y = -9 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-5)} \begin{cases} 5x + 3y = -9 \\ -5x + 20y = 55 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 23y = 46 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 2)$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 9x - 6y = 24 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 14x = 28 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1 \rightarrow (2, -1)$$

e)
$$\begin{cases} 7x + 5y = -2 \\ 21x + 13y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{cases} -21x - 15y = 6 \\ 21x + 13y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -2y = 2 \rightarrow y = -1 \rightarrow x = \frac{3}{7} \rightarrow \left(\frac{3}{7}, -1\right)$$

f)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 2 \end{matrix}} \begin{cases} 15x + 10y = 35 \\ 8x - 10y = -12 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 23x = 23 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow (1, 2)$$

31 Calcúla las soluciones de los sistemas siguientes aplicando dos veces el método de reducción.

a)
$$\begin{cases} 10x + 9y = 9 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 7x + 3y = -5 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ -3x + 4y = 31 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -x + 9y = 18 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 10x + 9y = 9 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\cdot 3} 10x + 9y = 9 \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} 10x + 9y = 9 \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} -10x + 6y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} \begin{cases} 25x = 15 \rightarrow x = \frac{3}{5} \\ 15y = 5 \rightarrow y = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

b)
$$\begin{cases} 7x + 3y = -5 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} -14x - 6y = 10 \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} -14x - 6y = 10 \\ \xrightarrow{\cdot 7} 14x + 42y = 14 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} \begin{cases} -12x = 12 \rightarrow x = -1 \\ 36y = 24 \rightarrow y = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ -3x + 4y = 31 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\cdot 4} 8x + 20y = 40 \\ \xrightarrow{\cdot(-5)} 15x - 20y = -155 \\ \xrightarrow{\cdot 3} 6x + 15y = 30 \\ \xrightarrow{\cdot 2} -6x + 8y = 62 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} \begin{cases} 23x = -115 \rightarrow x = -5 \\ 23y = 92 \rightarrow y = 4 \end{cases} \rightarrow (-5, 4)$$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -x + 9y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\cdot 3} 6x - 9y = -3 \\ \xrightarrow{\cdot 2} 2x - 3y = -1 \\ \xrightarrow{\cdot 2} -2x + 18y = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} \begin{cases} 5x = 15 \rightarrow x = 3 \\ 15y = 35 \rightarrow y = \frac{7}{3} \end{cases} \rightarrow \left(3, \frac{7}{3}\right)$$

e)
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\cdot 3} x + 6y = 9 \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} 2x - 6y = 0 \\ \xrightarrow{\cdot 3} x + 6y = 9 \\ \xrightarrow{\cdot 3} -x + 3y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} \begin{cases} 3x = 9 \rightarrow x = 3 \\ 9y = 9 \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow (3, 1)$$

f)
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \frac{2}{3}x + y = 4 \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} 2x - y = 4 \\ \xrightarrow{\cdot 3} 2x + 3y = 12 \\ \xrightarrow{\cdot 2} -2x + y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} \begin{cases} \frac{8}{3}x = 8 \rightarrow x = 3 \\ 4y = 8 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow (3, 2)$$

32 Resuelve por el método de reducción.

$$\text{a) } \begin{cases} 3 \cdot (2x + y) - 1 = 5x \\ 2 + 5 \cdot (x + 1) = -3y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 9 - 5 \cdot (x + 2) = -1 - 3y \\ 3x - 4y = -1 - 5 \cdot (y - x) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 7 \cdot (2 + y) = 1 \\ 2 \cdot (3x + y) - 3 = x + y \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - (2 - y) + 1 = 7 - 2 \cdot (3 - x) \\ 17 - 2 \cdot (x + 1) = 1 - 3y \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-5)} \begin{cases} -5x - 15y = -5 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -12y = -12 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 1)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 7y = 15 \\ 5x + y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-5)} \begin{cases} -5x + 35y = -75 \\ 5x + y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 36y = -72 \rightarrow y = -2 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, -2)$$

$$\text{c) } \begin{cases} -5x + 3y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{cases} -5x + 3y = 0 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} x = 3 \rightarrow y = 5 \rightarrow (3, 5)$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + 3y = -14 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ -2x + 3y = -14 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 5y = -10 \rightarrow y = -2 \rightarrow x = 4 \rightarrow (4, -2)$$

33 Simplifica y resuelve después por reducción.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y}{2} = -\frac{17}{6} \\ \frac{3x-1}{2} + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{3 \cdot (2x-1)}{5} - \frac{3 \cdot (y+1)}{2} = -3 \\ \frac{5-3x}{4} + \frac{5 \cdot (x+y)}{3} = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{y+1}{10} = -\frac{1}{5} \\ \frac{x-3}{6} - \frac{2y}{9} = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{9-6 \cdot (x+1)}{7} - y = -\frac{2}{7} \\ \frac{3y-x}{2} - \frac{5y}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = -21 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 4x - 6y = -42 \\ 9x + 6y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 13x = -39 \rightarrow x = -3 \rightarrow y = 5 \rightarrow (-3, 5)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + y = -3 \\ 3x - 4y = -7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 4} \begin{cases} 16x + 4y = -12 \\ 3x - 4y = -7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 19x = -19 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 1 \rightarrow (-1, 1)$$

$$\text{c) } \begin{cases} 12x - 15y = -9 \\ 11x + 20y = 93 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 4} \begin{cases} 48x - 60y = -36 \\ 33x + 60y = 279 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 81x = 243 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow (3, 3)$$

$$\text{d) } \begin{cases} 6x + 7y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-7)} \begin{cases} 6x + 7y = 5 \\ -21x - 7y = -35 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -15x = -30 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1 \rightarrow (2, -1)$$

34 Elena recibió el mes pasado un pedido de 7 paquetes de bolígrafos azules y 6 rojos que hacían un total de 60 unidades. Este mes han llegado 5 paquetes de azules y 3 de rojos, con un total de 39 unidades. ¿Cuántos bolígrafos contiene cada paquete? Si llamamos x al número de unidades que contiene un paquete de bolígrafos azules e y al número de unidades que contiene un paquete de bolígrafos rojos, obtenemos este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{Número de bolígrafos el mes pasado} \rightarrow 7x + 6y = 60 \\ \text{Número de bolígrafos este mes} \rightarrow 5x + 3y = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 6y = 60 \\ 5x + 3y = 39 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 7x + 6y = 60 \\ -10x - 6y = -78 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -3x = -18 \rightarrow x = 6 \rightarrow y = 3 \rightarrow (6, 3)$$

Los paquetes de bolígrafos azules contienen 6 unidades y los de bolígrafos rojos solo 3.

Desafío

35 Resuelve los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 7x + 9y = 11 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 4y = 7 \\ 10x + 13y = 16 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 5y = 9 \\ 13x + 17y = 21 \end{cases}$$

■ Observa los sistemas propuestos. ¿Cómo son sus coeficientes?

■ Analiza las soluciones; ¿cómo son? ¿Cuánto suma el par de números? Generaliza el resultado.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-4)} \begin{cases} -4x - 8y = -12 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -3y = -6 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 2)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 7x + 9y = 11 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-7)} \begin{cases} -7x - 21y = -35 \\ 7x + 9y = 11 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -12y = -24 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 2)$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 4y = 7 \\ 10x + 13y = 16 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-10)} \begin{cases} -10x - 40y = -70 \\ 10x + 13y = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -27y = -54 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 2)$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 5y = 9 \\ 13x + 17y = 21 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-13)} \begin{cases} -13x - 65y = -117 \\ 13x + 17y = 21 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} -48y = -96 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 2)$$

Los coeficientes de cada sistema están en progresión aritmética, de diferencia 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Todos los sistemas tienen la misma solución: $(-1, 2)$

En general, para un sistema cuyos coeficientes estén en progresión aritmética de primer término 1 y diferencia d , parece que su solución va a ser siempre $(-1, 2)$.

5. Sistemas de ecuaciones no lineales

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones



Aprenderás a...

- Resolver sistemas de ecuaciones no lineales.
- Aplicar los sistemas no lineales a la resolución de problemas.

Presta atención

Los sistemas de ecuaciones no lineales:

■ pueden tener más de una solución sin ser indeterminados.

■ se resuelven aplicando los métodos de sustitución, igualación o reducción dependiendo del sistema.

5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

A Toni le encantan los problemas numéricos y se ha encontrado con dos que no había visto antes.

Para resolverlos, Toni ha llamado x e y a cada uno de los números por los que se pregunta.

■ Al expresar las condiciones que han de cumplir los números del primer problema, ha obtenido este sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

Se trata de un **sistema no lineal** porque son ecuaciones de segundo grado. Para resolverlo, Toni se ha decidido por el método de reducción.

1 Multiplica ambas ecuaciones para conseguir otras equivalentes que tengan los coeficientes de una de las dos incógnitas opuestos. En este caso ya lo tiene.

2 Suma las dos ecuaciones equivalentes y resuelve la resultante.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases} \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$$

3 Para cada valor obtenido calcula la otra incógnita, sustituyéndola en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

$$\text{Si } x = 4 \rightarrow (4)^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = \pm\sqrt{9} \rightarrow y = \pm 3$$

Así, obtiene cuatro soluciones:

$$(4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)$$

■ Al plantear las ecuaciones del segundo problema, ha obtenido este otro sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases} \xrightarrow{\cdot 6xy} \begin{cases} x + y = 5 \\ 6y + 6x = 5xy \end{cases}$$

También obtiene un **sistema no lineal**, pues tiene una ecuación racional que se transforma en una de segundo grado. En este caso lo resuelve por sustitución:

1 Despeja una de las incógnitas, x , en la ecuación más sencilla:

$$x + y = 5 \rightarrow x = 5 - y$$

2 Sustituye en la otra y resuelve la ecuación resultante:

$$6y + 6 \cdot (5 - y) = 5 \cdot (5 - y) \cdot y \rightarrow 5y^2 - 25y + 30 = 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \rightarrow y = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

3 Para cada valor obtenido halla la otra incógnita, sustituyendo en la primera expresión:

$$\text{Si } y_1 = 3 \rightarrow x_1 = 5 - 3 = 2 \rightarrow \text{Solución: } (2, 3)$$

$$\text{Si } y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 5 - 2 = 3 \rightarrow \text{Solución: } (3, 2)$$

Los números que busca son el 2 y el 3.

Un **sistema de ecuaciones no lineal** está formado por al menos una ecuación que no es de primer grado.



36 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 5x + y = 3 \\ (x+1) \cdot y = -4 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} x - y = 1 \\ x \cdot y = 30 \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 - 2y - 7 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

37 Resuelve y comprueba las soluciones.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{11}{10} \\ x + y = 7 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} -\frac{x}{x+6} + \frac{3}{y+6} = 2 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{x} = 1 \\ x = 2 - 3y \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} \frac{3}{x-y} + \frac{1}{x} = 2 \\ 3y - x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

38 Averigua todas las soluciones de estos sistemas no lineales. Comprueba si son válidas.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x - 2 = y \\ \sqrt{x+1} + y = 3 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} y - 1 = \sqrt{3x+1} \\ \sqrt{x} = \frac{\sqrt{y+1}}{2} \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} \sqrt{6+y} - 5 = x \\ x - 1 = 2y \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 4y - 2\sqrt{x} = -16 \\ \sqrt{x} + 3 = \sqrt{4-7y} \end{cases} \end{aligned}$$

39 Aplica el método de reducción para resolver los siguientes sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 5x^2 - 4y^2 = 4 \\ -3x^2 + 2y^2 = -4 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} 7x^2 + y^2 = 4 \\ 5 - 2y^2 = x^2 - 3 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 3 - 2y^2 = x^2 - 8 \\ 2x^2 - 5y^2 = 4 + x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

40 Halla todas las soluciones de los sistemas propuestos.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 3y^2 - 4x^2 = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} y = x^2 \\ 8x = y^2 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25 \\ 2x - y = 1 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} x^3 + xy - y^2 = x - 2 \\ y - 2x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

41 Las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas constituyen una recta. De este modo, la solución de un sistema compatible determinado es el punto donde estas rectas se cortan.

Investiga con GeoGebra cómo son las soluciones de una ecuación no lineal de la forma:

$$x \cdot y = k \quad ax^2 + by^2 = c \quad mx + ny^2 = p \quad mx^2 + ny = p$$

Modifica los valores de las constantes a, b, c, k, m, n, p (números reales) y observa qué ocurre. Prueba después combinando dos de ellas y determina cuántas soluciones podrían tener estos sistemas:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x \cdot y = k \\ ax^2 + by^2 = c \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} x \cdot y = k \\ mx + ny^2 = p \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} mx + ny^2 = p \\ ax^2 + by^2 = c \end{cases} \end{aligned}$$

Actividades

5

EJERCICIO RESUELTO

Resuelve el sistema: $\begin{cases} 4x - xy = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Solución

Reservamos factor común en la primera ecuación.

$$x(4-y) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4-y=0 \rightarrow y=4 \end{cases}$$

Controlamos el producto en igual a 0, podemos resolverlo igualando cada factor a 0.

Resolvemos por las otras ecuaciones para hallar el valor de la otra incógnita.

$$\text{Si } x=0 \rightarrow 0 + y = 1 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Si } y=4 \rightarrow 3x + 4 = 1 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = -1$$

Las soluciones son pares de números: $(0, 1)$ y $(-1, 4)$

41 Resuelve.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} xy = 0 \\ \frac{2x}{3} + \frac{5y-2}{2} = 4 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} y \cdot (x-1) = 0 \\ 3y = x+2 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} (x+3) \cdot (y-2) = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 2xy + 3y = 0 \\ y + 3 = -4x \end{cases} \end{aligned}$$

42 Uno de los catetos de un triángulo rectangular es 2 cm más largo que el otro. Averigua su perímetro sabiendo que mide 24 cm² de superficie.

43 Un grupo de amigos ha comprado un regalo para un cumpleaños por 60 €. Al final se unen dos amigos más y así cada uno tiene que poner 5€ menos para pagar el regalo. ¿Cuántos amigos eran al principio? ¿Cuánto dinero pusieron finalmente?



Investiga

Sugerencias didácticas

En este epígrafe se trabajan todo tipo de sistemas no lineales. Es importante que los alumnos vean que no hay un método nuevo para resolverlos. Que se den cuenta de que no todos los métodos son válidos para todos los sistemas y que dependiendo del mismo uno será mejor que otro.

Para conseguir que se manejen con soltura y aprendan a elegir la opción más sencilla deberían practicar y poner en común el método elegido por cada uno y discutir ventajas e inconvenientes de cada elección.

Soluciones de las actividades

36 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 5x + y = 3 \\ (x+1) \cdot y = -4 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} x - y = 1 \\ x \cdot y = 30 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 - 2y - 7 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = 3 - 5x \\ (x+1) \cdot y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} (x+1) \cdot (3-5x) = -4 \rightarrow 5x^2 + 2x - 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = -2 \rightarrow (1, -2) \\ x_2 = -\frac{7}{5} \rightarrow y_2 = 10 \rightarrow (-\frac{7}{5}, 10) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 1 + y \\ x \cdot y = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} (1+y) \cdot y = 30 \rightarrow y^2 + y - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 6 \rightarrow (6, 5) \\ y_2 = -6 \rightarrow x_2 = -5 \rightarrow (-5, -6) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 5 = y \\ x^2 - 2y - 7 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} x^2 - 2 \cdot (2x - 5) - 7 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow (3, 1) \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = -3 \rightarrow (1, -3) \end{cases}$$

En los ejercicios se proponen distintos métodos para que puedan practicar según el tipo de sistema.

Vídeo. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

En el vídeo se muestra la resolución del sistema de ecuaciones no lineales del ejercicio resuelto de la página de Actividades. Es conveniente destacar que el procedimiento completo incluye sustituir una solución en la otra ecuación para obtener el valor de la segunda incógnita y que dichos valores, como par, son solución del sistema. Puede reproducirse en clase para completar la explicación de la página anterior o como recurso para que los alumnos repasen este tipo de ejercicios más tarde.

37 Resuelve y comprueba las soluciones.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{11}{10} \\ x + y = 7 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{2}{y} + \frac{y}{x} = 1 \\ x = 2 - 3y \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{-x}{x+6} + \frac{3}{y+6} = 2 \\ y - x + 2 = 0 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{x-y} + \frac{1}{x} = 2 \\ 3y - x = -2 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 10y + 30x = 11xy \\ x = 7 - y \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} 10y + 30 \cdot (7 - y) = 11 \cdot (7 - y) \cdot y \rightarrow 11y^2 - 97y + 210 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 2 \rightarrow (2, 5) \\ y_2 = \frac{42}{11} \rightarrow x_2 = \frac{35}{11} \rightarrow \left(\frac{35}{11}, \frac{42}{11}\right) \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y^2 = xy \\ x = 2 - 3y \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} 2 \cdot (2 - 3y) + y^2 = (2 - 3y) \cdot y \rightarrow 4y^2 - 8y + 4 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 1)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{-x}{x+6} + \frac{3}{y+6} = 2 \\ y = x - 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} \frac{-x}{x+6} + \frac{3}{(x-2)+6} = 2 \rightarrow \frac{-x}{x+6} + \frac{3}{x+4} = 2 \rightarrow 3x^2 + 21x + 30 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2 \rightarrow y_1 = -4 \rightarrow (-2, -4) \\ x_2 = -5 \rightarrow y_2 = -7 \rightarrow (-5, -7) \end{array} \right.$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 3x + (x - y) = 2 \cdot x \cdot (x - y) \\ 3y - x = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x - y = 2x^2 - 2xy \\ 3y + 2 = x \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} 4(3y + 2) - y = 2(3y + 2)^2 - 2(3y + 2) \cdot y$$

$$12y^2 + 9y = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \rightarrow (2, 0) \\ y_2 = -\frac{3}{4} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{4} \rightarrow \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) \end{array} \right.$$

38 Averigua todas las soluciones de estos sistemas no lineales. Comprueba si son válidas.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 2 = y \\ \sqrt{x+1} + y = 3 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} \sqrt{6+y} - 5 = x \\ x - 1 = 2y \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} y - 1 = \sqrt{3x+1} \\ \sqrt{x} = \frac{\sqrt{y+1}}{2} \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 4y - 2\sqrt{x} = -16 \\ \sqrt{x} + 3 = \sqrt{4-7y} \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 2 = y \\ \sqrt{x+1} + y = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} \sqrt{x+1} + (x - 2) = 3 \rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (5 - x)^2$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow (3, 1) \\ x_2 = 8 \rightarrow \text{No válida} \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \sqrt{6+y} - 5 = x \\ x = 2y + 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} \sqrt{6+y} - 5 = 2y + 1 \rightarrow (\sqrt{6+y})^2 = (2y + 6)^2$$

$$4y^2 + 23y + 30 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -2 \rightarrow x_1 = -3 \rightarrow (-3, -2) \\ y_2 = -\frac{15}{4} \rightarrow \text{No válida} \end{array} \right.$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} y - 1 = \sqrt{3x+1} \\ \sqrt{x} = \frac{\sqrt{y+1}}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y - 1 = \sqrt{3x+1} \\ (2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y+1})^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y - 1 = \sqrt{3x+1} \\ 4x - 1 = y \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} (4x - 1) - 1 = \sqrt{3x+1}$$

$$(4x - 2)^2 = (\sqrt{3x+1})^2 \rightarrow 16x^2 - 19x + 3 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 3 \rightarrow (1, 3) \\ x_2 = \frac{3}{16} \rightarrow \text{No válida} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \left. \begin{aligned} 4y + 16 = 2\sqrt{x} \\ \sqrt{x} = \sqrt{4-7y} - 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 2y + 8 = \sqrt{x} \\ \sqrt{x} = \sqrt{4-7y} - 3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Igual.}} 2y + 8 = \sqrt{4-7y} - 3 \\
 & (2y + 11)^2 = (\sqrt{4-7y})^2 \rightarrow 4y^2 + 51y + 117 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = -3 \rightarrow x_1 = 4 \rightarrow (4, -3) \\ y_2 = -\frac{39}{4} \rightarrow \text{No válida} \end{cases}
 \end{aligned}$$

39 Aplica el método de reducción para resolver los siguientes sistemas.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \left. \begin{aligned} 2x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{aligned} \right\} & \text{b) } & \left. \begin{aligned} 7x^2 + y^2 = 4 \\ 5 - 2y^2 = x^2 - 3 \end{aligned} \right\} & \text{c) } & \left. \begin{aligned} 5x^2 - 4y^2 = 4 \\ -3x^2 + 2y^2 = -4 \end{aligned} \right\} & \text{d) } & \left. \begin{aligned} 3 - 2y^2 = x^2 - 8 \\ 2x^2 - 5y^2 = 4 + x^2 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 2x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} 3x^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow (1, 2) \text{ y } (1, -2) \\ x = -1 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow (-1, 2) \text{ y } (-1, -2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 7x^2 + y^2 = 4 \\ -x^2 - 2y^2 = -8 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left. \begin{aligned} 14x^2 + 2y^2 = 8 \\ -x^2 - 2y^2 = -8 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} 13x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow (0, 2) \text{ y } (0, -2)$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} 5x^2 - 4y^2 = 4 \\ -3x^2 + 2y^2 = -4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left. \begin{aligned} 5x^2 - 4y^2 = 4 \\ -6x^2 + 4y^2 = -8 \end{aligned} \right\} \rightarrow -x^2 = -4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow (2, 2) \text{ y } (2, -2) \\ x = -2 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow (-2, 2) \text{ y } (-2, -2) \end{cases}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} -x^2 - 2y^2 = -11 \\ x^2 - 5y^2 = 4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} -7y^2 = -7 \rightarrow \begin{cases} y = 1 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (3, 1) \text{ y } (-3, 1) \\ y = -1 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (3, -1) \text{ y } (-3, -1) \end{cases}$$

40 Halla todas las soluciones de los sistemas propuestos.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \left. \begin{aligned} 3y^2 - 4x^2 = -1 \\ x + 3y = 2 \end{aligned} \right\} & \text{b) } & \left. \begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 = 25 \\ 2x - y = 1 \end{aligned} \right\} & \text{c) } & \left. \begin{aligned} y = x^2 \\ 8x = y^2 \end{aligned} \right\} & \text{d) } & \left. \begin{aligned} x^3 + xy - y^2 = x - 2 \\ y - 2x = 0 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 3y^2 - 4x^2 = -1 \\ x = 2 - 3y \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} 3y^2 - 4 \cdot (2 - 3y)^2 = -1 \rightarrow -33y^2 - 48y - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \rightarrow (-1, 1) \\ y_2 = \frac{5}{11} \rightarrow x_2 = \frac{7}{11} \rightarrow \left(\frac{7}{11}, \frac{5}{11}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \left. \begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 = 25 \\ 2x - 1 = y \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} x^2 + 2x \cdot (2x - 1) + (2x - 1)^2 = 25 \rightarrow 9x^2 - 6x - 24 = 0 \\
 & \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3 \rightarrow (2, 3) \\ x_2 = -\frac{4}{3} \rightarrow y_2 = -\frac{11}{3} \rightarrow \left(-\frac{4}{3}, -\frac{11}{3}\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} y = x^2 \\ 8x = y^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} 8x = (x^2)^2 \rightarrow x^4 - 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x_2 = 2 \rightarrow y_2 = 4 \rightarrow (2, 4) \end{cases}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} x^3 + xy - y^2 = x - 2 \\ y = 2x \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} x^3 + x \cdot 2x - (2x)^2 = x - 2 \rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow y_1 = -2 \rightarrow (-1, -2) \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 2 \rightarrow (1, 2) \\ x_3 = 2 \rightarrow y_3 = 4 \rightarrow (2, 4) \end{cases}$$

41 Resuelve.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \left. \begin{aligned} xy = 0 \\ \frac{2x}{3} + \frac{5y-2}{2} = 4 \end{aligned} \right\} & \text{b) } & \left. \begin{aligned} (x+3) \cdot (y-2) = 0 \\ 2x + y = 1 \end{aligned} \right\} & \text{c) } & \left. \begin{aligned} y \cdot (x-1) = 0 \\ 3y = x+2 \end{aligned} \right\} & \text{d) } & \left. \begin{aligned} 2xy + 3y = 0 \\ y + 3 = -4x \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} xy = 0 \\ 4x + 15y - 6 = 24 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow 15y - 6 = 24 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2) \\ y = 0 \rightarrow 4x - 6 = 24 \rightarrow y = \frac{15}{2} \rightarrow \left(\frac{15}{2}, 0\right) \end{cases}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} (x+3) \cdot (y-2) = 0 \\ 2x + y = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow -6 + y = 1 \rightarrow y = 7 \rightarrow (-3, 7) \\ y - 2 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow 2x + 2 = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \left. \begin{array}{l} y \cdot (x - 1) = 0 \\ 3y = x + 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow 3y = 1 + 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow (1, 1) \\ y = 0 \rightarrow 0 = x + 2 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0) \end{array} \right. \\ \text{d) } & \left. \begin{array}{l} (2x + 3) \cdot y = 0 \\ y + 3 = -4x \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \rightarrow y + 3 = 6 \rightarrow y = 3 \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 3\right) \\ y = 0 \rightarrow 3 = -4x \rightarrow x = -\frac{3}{4} \rightarrow \left(-\frac{3}{4}, 0\right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

- 42) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo es 2 cm más largo que el otro. Averigua su perímetro sabiendo que mide 24 cm² de superficie.

Si llamamos x a la longitud del cateto menor e y a la longitud del cateto mayor, obtenemos el siguiente sistema a partir del enunciado:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Catetos: } x + 2 = y \\ \text{Superficie: } \frac{x \cdot y}{2} = 24 \end{array} \right\}$$

Si resolvemos por sustitución: $\frac{x \cdot (x + 2)}{2} = 24 \rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \rightarrow y = 8 \\ x_2 = -8 \rightarrow \text{No válido} \end{cases}$

Los catetos miden 6 cm y 8 cm, así la hipotenusa mide: $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm.

El perímetro mide: $6 + 8 + 10 = 24$ cm.

- 43) Un grupo de amigos ha comprado un regalo para un cumpleaños por 60 €. Al final se unen dos amigos más y así cada uno tiene que poner 5 € menos para pagar el regalo. ¿Cuántos amigos eran al principio? ¿Cuánto dinero pusieron finalmente?

Si llamamos x al número de amigos que participaron al principio, al final participarán: $x + 2$.

Si y representa el dinero, en euros, que aportaba cada uno al principio, finalmente pondrán: $y - 5$.

A partir de la información del enunciado podemos escribir el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Inicialmente: } x \cdot y = 60 \\ \text{Finalmente: } (x + 2) \cdot (y - 5) = 60 \end{array} \right\}$$

Si resolvemos por sustitución:

$$y = \frac{60}{x} \xrightarrow{\text{Sust.}} (x + 2) \cdot \left(\frac{60}{x} - 5 \right) = 60 \rightarrow 60 - 5x + \frac{120}{x} - 10 = 60 \xrightarrow{\cdot x} -5x^2 - 10x + 120 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = 15 \\ x = -6 \rightarrow \text{No válido} \end{cases}$$

Al principio solo eran cuatro amigos, y al final pusieron $15 - 5 = 10$ € cada uno.

Investiga

- 44) Las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas constituyen una recta. De este modo, la solución de un sistema compatible determinado es el punto donde estas rectas se cortan.

Investiga con GeoGebra cómo son las soluciones de una ecuación no lineal de la forma:

$$x \cdot y = k \quad ax^2 + by^2 = c \quad mx + ny^2 = p \quad mx^2 + ny = p$$

Modifica los valores de las constantes a, b, c, k, m, n, p (números reales) y observa qué ocurre. Prueba después combinando dos de ellas y determina cuántas soluciones podrían tener estos sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x \cdot y = k \\ ax^2 + by^2 = c \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} x \cdot y = k \\ mx + ny^2 = p \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} mx + ny^2 = p \\ ax^2 + by^2 = c \end{array} \right\} \end{array}$$

Las soluciones de cada ecuación forman:

$x \cdot y = k$ una hipérbola cuyos ejes son los ejes de coordenadas.

$ax^2 + by^2 = c$, una elipse, hipérbola o circunferencia, según los valores de a, b y c .

$mx + ny^2 = p$, una parábola cuyo eje es el eje de abscisas.

$mx^2 + ny = p$, una parábola cuyo eje es el eje de ordenadas.

- a) Podría tener entre 0 y 4 soluciones. b) Podría tener 1 o 3 soluciones. c) Podría tener entre 0 y 3 soluciones.

6. Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones



Aprenderás a...

- Resolver sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Plantear sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas para resolver problemas.

6. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Fijate en estos sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5^x \cdot 25^y = 5^5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 32 \\ 5^x \cdot 2^{2y} = 5^5 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 0 \\ \log_2(x+5) + \log_2(1/y) = 2 \end{cases}$$

Son **sistemas de ecuaciones exponenciales** o **logarítmicas** aquellos sistemas en los que las incógnitas, x e y , aparecen como exponentes de una potencia o partes de un logaritmo, respectivamente.

- Para resolver el primer sistema, expresamos los dos miembros de la segunda ecuación como potencias de 5 a fin de igualar los exponentes.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5^x \cdot (5^2)^y = 5^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 5^x \cdot 5^{2y} = 5^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

El sistema que se obtiene es lineal y se puede resolver por reducción.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \begin{cases} x + y = 4 \\ -x - y = -1 \end{cases} \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3$$

La solución es: (3, 1)

- Para resolver el segundo, hacemos dos cambios de variable y así transformamos el sistema en otro que no tenga potencias.

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^x \cdot 3^y = 243 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z + t = 36 \\ z \cdot t = 243 \end{cases}$$

El sistema que obtenemos es no lineal y lo resolvemos por sustitución.

$$z = 36 - t \rightarrow (36 - t) \cdot t = 243 \rightarrow t^2 - 36t + 243 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 27 \\ t_2 = 9 \end{cases}$$

Buscamos el valor de z para cada valor de t y deshacemos los cambios:

$$t_1 = 27 \rightarrow 3^x = 3^z \rightarrow y_1 = 3 \rightarrow z_1 = 36 - 27 \rightarrow z_1 = 9 \rightarrow 3^x = 3^9 \rightarrow x_1 = 27$$

$$t_2 = 9 \rightarrow 3^x = 3^z \rightarrow y_2 = 2 \rightarrow z_2 = 36 - 9 \rightarrow z_2 = 27 \rightarrow 3^x = 3^{27} \rightarrow x_2 = 3$$

De este modo, obtenemos dos soluciones válidas: (2, 3) y (3, 2)

- En el tercer sistema utilizamos las propiedades de los logaritmos para sustituir las ecuaciones por otras equivalentes sin ellos.

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 0 \\ \log_2(x+5) + \log_2(1/y) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x}{y} = 0 \\ \log_2 \frac{x+5}{y} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x+5}{y} = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ x + 5 = 4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ x + 5 = 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 5/3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5/3 \\ y = 5/3 \end{cases}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones exponenciales o logarítmicas, se transforman primero en otros equivalentes aplicando las propiedades y definiciones de potencia y logaritmo. Después, se resuelven y se comprueban las soluciones.

Recuerda

$$\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P \\ \log_a P = \log_a Q \Leftrightarrow P = Q$$

106

Actividades

5

- 45 Resuelve aplicando las propiedades de las potencias y el método de sustitución.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x + y = 8 \\ 2^x : 2^{y+1} = 8 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3^x \cdot 9^y = 81 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 10^x : 100^y = 1000 \end{cases} \end{array}$$

- 46 Transforma los sistemas igualando los exponentes y resuelve.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 2^{x+2y} = 1 \\ 2^{2x+y} = 2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 5^{x+y} = 125^2 \\ 5^{x-y} = \frac{1}{5} \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3^{x+y} = 27 \\ 9^{x-y} = 27 \end{cases} \end{array}$$

- 47 Calcula las soluciones de estos sistemas.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 3^x \cdot 3^{x-1} = 9 \\ 3^x : 3^y = 27 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2^x \cdot 2^y = \frac{1}{2} \\ 3^x : 3^y = 27 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 6^x : 36^y = 6 \\ 2^x \cdot 2^y = 8 \end{cases} \end{array}$$

- 48 Halla las soluciones de los sistemas propuestos a continuación, aplicando el cambio de variable adecuado en cada caso.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 2^x \cdot 2^y = 32 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 5^x + 3 \cdot 5^y = 80 \\ 5^{x+y} = 1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3^{x+1} + 3^y = 90 \\ 3^{xy} = 243 \end{cases} \end{array}$$

- 49 Aplica la definición de logaritmo para transformar estos sistemas en otros no lineales y, después, resuélvelos.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} \log_2 y = 3 \\ 2x - y = -4 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \log_2(y-5) = 2 \\ -4x + y = 1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \log_2(4x+1) = 2 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases} \end{array}$$

- 50 Encuentra las soluciones utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ x - 2y = 3 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y = \log_2 3 \\ x - 10y = 16 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 3 \\ \log_2 x + \log_2 y = 7 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \log(3x+1) - \log(y+2) = 1 \\ \log(x-2) = \log(-2y) - \log 2 \end{cases} \end{array}$$

- 51 Los habitantes de la localidad de Leandro son curiosos. Para demostrarlo, ha lanzado un rumor con el móvil de modo que cada vez que este es reenviado le llega un aviso. Cada hora las personas que se enteran reenvían el mensaje a otras tres. En algún momento, el rumor llega a la localidad vecina, donde cada persona que se entera reenvía el mensaje a otras cinco, en una hora. De repente, Leandro ve que se envían 1354 mensajes. Si de ellos se han mandado en su población 104 más que en la vecina, ¿cuántas horas han transcurrido desde que hiciera correr el rumor?



DESAFIO

- 52 Beatriz ha hecho una apuesta en un sorteo que consiste en elegir cinco números del 1 al 49.

Al preguntarle que números ha elegido, Beatriz contesta:

- He escogido cinco números cuyo producto tiene un logaritmo decimal entero.
- Además, si se divide el producto del mayor y el menor entre el producto de los otros tres, el cociente también tiene un logaritmo decimal entero.

¿Es posible averiguar a qué números apostó Beatriz?



107

Sugerencias didácticas

Para trabajar con sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas volvemos de nuevo sobre las propiedades de las potencias y los logaritmos que se han repasado en el tema anterior para resolver ecuaciones.

Podemos proponerles que intenten transformar los sistemas aplicando propiedades en otros, lineales o no, que pueden resolver aplicando los epígrafes anteriores.

De nuevo conviene incidir en que no hay métodos nuevos, vuelven a utilizar lo que ya saben.

Soluciones de las actividades

- 45 Resuelve aplicando las propiedades de las potencias y el método de sustitución.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x + y = 8 \\ 2^x : 2^{y+1} = 8 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3^x \cdot 9^y = 81 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 10^x : 100^y = 1000 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 8 \\ 2^x : 2^{y+1} = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 8 - y \\ 2^{x-y-1} = 2^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 8 - y \\ x - y - 1 = 3 \end{cases} \rightarrow (8 - y) - y - 1 = 3 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 6 \rightarrow (6, 2)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3^x \cdot 9^y = 81 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ 3^x \cdot 3^{2y} = 3^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow x + 2 \cdot (-1 - 2x) = 4 \rightarrow x = -2 \rightarrow y = 3 \rightarrow (-2, 3)$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 10^x : 100^y = 1000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 10^x : 10^{2y} = 10^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ x - 2y = 3 \end{cases} \rightarrow (2 + y) - 2y = 3 \rightarrow y = -1 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, -1)$$

46 Transforma los sistemas igualando los exponentes y resuelve.

a) $\begin{cases} 2^{5x+2y} = 1 \\ 2^{3x+y} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125^3 \\ 5^{x-y} = \frac{1}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^{x+4y} = 27 \\ 9^{x+y} = 27 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^{5x+2y} = 2^0 \\ 2^{3x+y} = 2^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x+2y=0 \\ 3x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 5x+2y=0 \\ -6x-2y=-2 \end{cases} \rightarrow -x=-2 \rightarrow x=2 \rightarrow y=-5 \rightarrow (2, -5)$

b) $\begin{cases} 5^{x+y} = (5^3)^3 \\ 5^{x-y} = 5^{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=-1 \end{cases} \rightarrow 2x=8 \rightarrow x=4 \rightarrow y=5 \rightarrow (4, 5)$

c) $\begin{cases} 3^{x+4y} = 3^3 \\ (3^2)^{x+y} = 3^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+4y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} -2x-8y=-6 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \rightarrow -6y=-3 \rightarrow y=\frac{1}{2} \rightarrow x=1 \rightarrow (1, \frac{1}{2})$

47 Calcula las soluciones de estos sistemas.

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^{y-1} = 9 \\ 3^{2x} : 3^y = 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = \frac{1}{2} \\ 2^x : 2^y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6^x : 36^y = 6 \\ 2^x \cdot 2^y = 16 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3^{x+(y-1)} = 3^2 \\ 3^{2x-y} = 3^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases} \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=2 \rightarrow y=1 \rightarrow (2, 1)$

b) $\begin{cases} 2^{x+y} = 2^{-1} \\ 2^{x-y} = 2^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=3 \end{cases} \rightarrow 2x=2 \rightarrow x=1 \rightarrow y=-2 \rightarrow (1, -2)$

c) $\begin{cases} 6^x : (6^2)^y = 6^1 \\ 2^x \cdot 2^y = 2^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+2y=8 \end{cases} \rightarrow 3x=9 \rightarrow x=3 \rightarrow y=1 \rightarrow (3, 1)$

48 Halla las soluciones de los sistemas propuestos a continuación, aplicando el cambio de variable adecuado en cada caso.

a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 2^x \cdot 2^y = 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^x + 3 \cdot 5^y = 80 \\ 5^{x-y+1} = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^{x+1} + 3^y = 90 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 2^x \cdot 2^y = 32 \end{cases} \xrightarrow{\substack{2^x=z \\ 2^y=t}} \begin{cases} z+t=12 \\ z \cdot t=32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=12-z \\ z \cdot t=32 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} z \cdot (12-z) = 32 \rightarrow -z^2 + 12z - 32 = 0$
 $\rightarrow \begin{cases} z=4=2^x \rightarrow x=2 \rightarrow t=8=2^y \rightarrow y=3 \rightarrow (2, 3) \\ z=8=2^x \rightarrow x=3 \rightarrow t=4=2^y \rightarrow y=2 \rightarrow (3, 2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^x + 3 \cdot 5^y = 80 \\ \frac{5 \cdot 5^x}{5^y} = 1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{5^x=z \\ 5^y=t}} \begin{cases} z+3t=80 \\ \frac{5z}{t}=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z+3t=80 \\ 5z=t \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} z+3 \cdot 5z = 80 \rightarrow 16z = 80$
 $\rightarrow z=5=5^x \rightarrow x=1 \rightarrow t=25=5^y \rightarrow y=2 \rightarrow (1, 2)$

c) $\begin{cases} 3^{x+1} + 3^y = 90 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3^x + 3^y = 90 \\ 3^x \cdot 3^y = 243 \end{cases} \xrightarrow{\substack{3^x=z \\ 3^y=t}} \begin{cases} 3z+t=90 \\ z \cdot t=243 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=90-3z \\ z \cdot t=243 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} z \cdot (90-3z) = 243$
 $\rightarrow 3z^2 - 90z + 243 = 0 \rightarrow \begin{cases} z=3=3^x \rightarrow x=1 \rightarrow t=81=3^y \rightarrow y=4 \rightarrow (1, 4) \\ z=27=3^x \rightarrow x=3 \rightarrow t=9=3^y \rightarrow y=2 \rightarrow (3, 2) \end{cases}$

49 Aplica la definición de logaritmo para transformar estos sistemas en otros no lineales y, después, resuélvelos.

$$\text{a) } \begin{cases} \log_x y = 3 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_x (y - 5) = 2 \\ -4x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log_y (4x + 1) = 2 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} \log_x y = 3 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ 2x - y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} 2x - x^3 = -4 \rightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 8 \rightarrow (2, 8)$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_x (y - 5) = 2 \\ -4x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = y - 5 \\ y = 1 + 4x \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} x^2 = (1 + 4x) - 5 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 9 \rightarrow (2, 9)$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log_y (4x + 1) = 2 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x + 1 \\ 4x = 9 + 3y \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} y^2 = (9 + 3y) + 1 \rightarrow y^2 - 3y - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 6 \rightarrow (6, 5) \\ y_2 = -2 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

50 Encuentra las soluciones utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \log_2 x - \log_2 y = \log_2 3 \\ x - 10y = 16 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log x - \log y = 3 \\ \log x + \log y = 7 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \log(3x + 1) - \log(y + 2) = 1 \\ \log(x - 2) = \log(-2y) - \log 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3^3 \\ x = 3 + 2y \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} (3 + 2y) \cdot y = 27 \rightarrow 2y^2 + 3y - 27 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \rightarrow y = 9 \rightarrow (3, 9) \\ y_2 = -\frac{9}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log x - \log y = 3 \\ \log x + \log y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 10^3 \\ x \cdot y = 10^7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10^3 \cdot y \\ x \cdot y = 10^7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} (10^3 \cdot y) \cdot y = 10^7 \rightarrow y^2 = 10^4$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = 10^2 \rightarrow x = 10^5 \rightarrow (10^5, 10^2) \\ y_2 = -10^2 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \log_2 x - \log_2 y = \log_2 3 \\ x - 10y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{y} = 3 \\ x = 16 + 10y \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} (\sqrt{16 + 10y})^2 = (3y)^2 \rightarrow 9y^2 - 10y - 16 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \rightarrow y = 36 \rightarrow (2, 36) \\ y_2 = -\frac{8}{9} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \log(3x + 1) - \log(y + 2) = 1 \\ \log(x - 2) = \log(-2y) - \log 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 1}{y + 2} = 10 \\ x - 2 = \frac{-2y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 10 \cdot (y + 2) \\ -x + 2 = y \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} 3x + 1 = 10 \cdot (-x + 2 + 2)$$

$$\rightarrow 13x = 39 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1 \rightarrow (3, -1)$$

- 51 Los habitantes de la localidad de Leandro son curiosos. Para demostrarlo, ha lanzado un rumor con el móvil de modo que cada vez que este es reenviado le llega un aviso. Cada hora las personas que se enteran reenvían el mensaje a otras tres. En algún momento, el rumor llega a la localidad vecina, donde cada persona que se entera reenvía el mensaje a otras cinco, en una hora. De repente, Leandro ve que se envían 1 354 mensajes. Si de ellos se han mandado en su población 104 más que en la vecina, ¿cuántas horas han transcurrido desde que hiciera correr el rumor?

Si llamamos x al número de horas transcurridas desde que hizo correr el rumor en su pueblo e y a las horas transcurridas desde que el rumor llegó a la localidad vecina obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Número total de mensajes: } 3^x + 5^y = 1\,354 \\ \text{Mensajes en cada localidad: } 3^x = 5^y + 104 \end{array} \right\}$$

Haciendo el cambio $3^x = z$ y $5^y = t$ obtenemos el sistema lineal:

$$\left. \begin{array}{l} z + t = 1\,354 \\ z = t + 104 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} (t + 104) + t = 1\,354 \rightarrow t = 625 \rightarrow z = 625 + 104 \rightarrow z = 729 = 3^x \rightarrow x = 6$$

Han transcurrido 6 horas desde que hizo correr el rumor.

Desafío

- 52 Beatriz ha hecho una apuesta en un sorteo que consiste en elegir cinco números del 1 al 49.

Al preguntarle que números ha elegido, Beatriz contesta:

- He escogido cinco números cuyo producto tiene un logaritmo decimal entero.
- Además, si se divide el producto del mayor y el menor entre el producto de los otros tres, el cociente también tiene un logaritmo decimal entero.

¿Es posible averiguar a qué números apostó Beatriz?



Si a, b, c, d, e son, de menor a mayor, los números a los que apostó Beatriz, para que el producto tenga un logaritmo decimal entero tiene que ser una potencia de 10. Es decir, al multiplicarlos todos se obtiene un número que su descomposición factorial es $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

$$\log(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) = \log 10^n = \log(2^n \cdot 5^n)$$

Y para que ese cociente también tenga logaritmo decimal entero:

$$\log \frac{a \cdot e}{b \cdot c \cdot d} = \log 10^m = \log(2^m \cdot 5^m)$$

Entre 1 y 49 los números que tienen en su descomposición solo 2 y 5 son:

$$2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40$$

Además podemos escoger la unidad que es tanto 2^0 como 5^0 .

Y para que haya tantos 2 como 5 hay varias opciones:

- $1, 2, 4, 5, 25 \rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25 = 10^3 \rightarrow \log(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25) = 3$
- $1, 5, 20, 25, 40 \rightarrow 1 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 40 = 10^5 \rightarrow \log(1 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 40) = 5$
- $2, 4, 5, 10, 25 \rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 25 = 10^4 \rightarrow \log(2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 25) = 4$
- $4, 5, 10, 20, 25 \rightarrow 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 = 10^5 \rightarrow \log(4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25) = 5$
- $5, 10, 20, 25 \text{ y } 40 \rightarrow 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 40 = 10^6 \rightarrow \log(5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 40) = 6$

Y comprobamos en qué casos si multiplicamos el mayor y el menor y lo dividimos entre el producto de los otros tres también se obtiene una potencia de 10:

$$\log \frac{a \cdot e}{b \cdot c \cdot d} = \log 10^m = \log(2^m \cdot 5^m)$$

Solo hay una válida:

$$4, 5, 10, 20, 25 \rightarrow \frac{4 \cdot 25}{5 \cdot 10 \cdot 20} = 10^{-1} \rightarrow \log\left(\frac{4 \cdot 25}{5 \cdot 10 \cdot 20}\right) = -1$$

Beatriz apostó a los números: 4, 5, 10, 20, 25.

7. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones



Aprenderás a...

- Resolver sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Plantear sistemas de inecuaciones de primer grado para resolver problemas.

7. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Chema quiere elaborar un nuevo pan de trigo y centeno con una mezcla de harinas que le cueste entre 0,60 €/kg y 0,70 €/kg.

Dispone en su almacén de harina de trigo cuyo precio es de 0,50 €/kg y de harina de centeno a 0,90 €/kg. La mezcla de harinas la hace por lotes de 25 kg.

Pretende averiguar entre qué valores está la cantidad de harina de centeno que tiene que poner en la mezcla para conseguir el precio deseado. Con este fin, llama x a la cantidad de harina de centeno de la mezcla:

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad de harina de centeno (kg)} \\ 25 - x &= \text{cantidad de harina de trigo (kg)} \end{aligned}$$

■ Si el precio de la mezcla es mayor o igual a 0,60 €/kg:

$$0,9x + 0,5 \cdot (25 - x) \geq 0,6 \cdot 25$$

■ Si es menor o igual a 0,70 €/kg:

$$0,9x + 0,5 \cdot (25 - x) \leq 0,7 \cdot 25$$

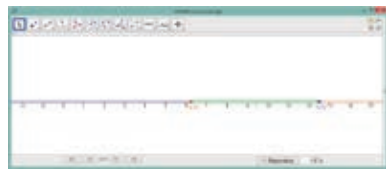
Para conseguir la mezcla deseada, se han de cumplir ambas inecuaciones a la vez. Así, tiene que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0,9x + 0,5 \cdot (25 - x) \geq 0,6 \cdot 25 \\ 0,9x + 0,5 \cdot (25 - x) \leq 0,7 \cdot 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,6 \cdot 25 \leq 0,9x + 0,5 \cdot (25 - x) \leq 0,7 \cdot 25 \end{cases}$$

1 Se resuelve cada inecuación por separado.

$$\begin{aligned} 0,9x + 12,5 - 0,5x &\geq 15 \rightarrow 0,4x \geq 2,5 \rightarrow x \geq \frac{2,5}{0,4} \rightarrow x \geq 6,25 \\ 0,9x + 12,5 - 0,5x &\leq 17,5 \rightarrow 0,4x \leq 5 \rightarrow x \leq \frac{5}{0,4} \rightarrow x \leq 12,5 \end{aligned}$$

2 Las soluciones son los valores de x que cumplen ambas desigualdades a la vez. Constituirán la intersección de los dos intervalos.



$$\begin{aligned} x \geq 6,25 &\rightarrow [6,25; +\infty) \\ x \leq 12,5 &\rightarrow (-\infty; 12,5] \end{aligned} \rightarrow [6,25; +\infty) \cap (-\infty; 12,5] = [6,25; 12,5]$$

La cantidad de harina de centeno que ha de poner por cada 25 kg de mezcla está entre 6,25 kg y 12,5 kg.

Un sistema de inecuaciones con una incógnita está formado por dos o más inecuaciones. La solución es el conjunto de números que cumplen todas las desigualdades a la vez.

Se resuelve cada inecuación por separado y se considera el conjunto formado por la intersección de los intervalos solución de cada una.

Recuerda

Tipos de intervalos:

- (a, b) $\rightarrow a < x < b$
- [a, b) $\rightarrow a \leq x < b$
- (a, b] $\rightarrow a < x \leq b$
- [a, b] $\rightarrow a \leq x \leq b$

Actividades

5

53 Resuelve estos sistemas de inecuaciones. ¿Tienen solución siempre?

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x + 5 < 9 \\ 2x + 1 \geq -13 \end{cases} & \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 6 \cdot (9 - 2x) \leq -3 \\ 4 \cdot (x + 1) - 12 > 0 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x + 7 \geq 5x - 3 \\ 2 - 7x < 9 \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} 6x - 4 \cdot (x + 6) \geq 0 \\ 3x + 5 \cdot (4 - x) \geq -4 \end{cases} \end{aligned}$$

54 Representa gráficamente las soluciones de cada una de las inecuaciones y determina las de cada sistema, si las tiene.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 15x - 8 \geq 5 - (x - 3) \\ 4 - 5 \cdot (1 - 2x) < 6 + 3x \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 9 \cdot (3 - 2x) + 5 \cdot (x + 5) \geq 0 \\ -2 \cdot (6 - 5x) \leq 3 \cdot (2 - x) - 5 \end{cases} \end{aligned}$$

55 Quita los denominadores y resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1 - 3x}{3} < 1 \\ \frac{2x + 1}{3} + \frac{5}{6} + x \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{7x - 9}{4} \geq \frac{2 - x}{3} \\ \frac{x}{7} - \frac{1 - x}{2} < 1 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{x - 3}{4} \leq 0 \\ \frac{3 \cdot (1 - 2x)}{5} > \frac{1}{2} \end{cases} & \quad \text{e) } \begin{cases} 6 \cdot \frac{x}{2} + \frac{3x}{5} \geq \frac{2x - 3}{10} \\ \frac{x - 6}{3} - \frac{2 \cdot (x + 2)}{5} \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{x - 1}{6} > \frac{5x}{3} \\ 2x + \frac{x - 3}{4} < \frac{3}{8} \end{cases} & \quad \text{f) } \begin{cases} \frac{2 \cdot (x - 1)}{3} - \frac{3 - x}{4} > -\frac{1}{2} \\ \frac{3x}{5} + \frac{x + 3}{10} < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

56 Escribe sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita que tengan la solución que se indica.

$$\begin{aligned} \text{a) } [-5; 1] & \quad \text{d) } \left[\frac{2}{3}; +\infty \right) \\ \text{b) } \left[-3; -\frac{1}{2} \right] & \quad \text{e) } \text{No tiene solución.} \\ \text{c) } (-\infty; -3] & \quad \text{f) } x = 3 \end{aligned}$$

57 Resuelve.

$$\begin{aligned} \text{a) } -1 \leq 3x - 1 \leq 5 & \quad \text{c) } -18 < 3x - 10 \leq 8 \\ \text{b) } 1 < 2 - x < 3 & \quad \text{d) } -7 \leq 1 - 2x \leq -3 \end{aligned}$$

58 Determina, si es posible, la solución de estos sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 2x - 3 > -9 \\ -2 \leq x + 3 \\ 4x + 5 < 2x \end{cases} & \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{x + 3}{2} \geq 5 \\ 5 - 7x > -2 \\ 2x - 3 < 3x - 2 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x > 3 - 7x \\ 4 \cdot (x - 1) + 6 > 2 \\ x \leq 1 \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} 5x - 3 \cdot (3x - 2) > 0 \\ 6x - 3 > -2 \cdot (x - 2) \\ 2x + \frac{1}{3} < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

59 Halla las soluciones de estos sistemas de inecuaciones de grado mayor que uno.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} -2 \geq 3x^2 + 7x \\ 2x \cdot (x + 5) \leq x - 10 \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} 2x^2 - 1 \leq 7 \\ \frac{3x - 1}{2} \geq x \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x^2 - 7 \leq x - 1 \\ 7 - 3 \cdot (x + 1) < 2x - 1 \end{cases} & \quad \text{e) } \begin{cases} x^2 < 3x \\ x^2 - 1 < \frac{3x}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{cases} x^2 + 5 \geq 3 \cdot (x + 1) \\ \frac{5 + x}{3} - \frac{x + 6}{2} < -1 \end{cases} & \quad \text{f) } \begin{cases} 1 \geq x^2 \\ x^2 + x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

60 Rocío y Raúl se encontraron en la papelería al ir a comprar bolígrafos. Rocío quería 3, pero no tenía suficiente para pagarlos con los 2 € que llevaba. Raúl, sin embargo, iba a adquirir 6 y le sobraba con el billete de 5 € que tenía.



Tras ponerse de acuerdo, pagaron todos los bolígrafos entre los dos. ¿Entre qué valores se encuentra el precio de un bolígrafo?

61 Una fábrica produce láminas rectangulares con imágenes decorativas cuya base es el doble que la altura. Los tamaños oscilan entre los 1458 cm² y los 6050 cm². ¿Entre qué dimensiones varían las láminas?

DESAFÍO

62 Considera el sistema:

$$\begin{cases} 3 - 4 \cdot (x - 2) \geq 8 \\ -2 + x \geq 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{cases}$$

Completalo en tu cuaderno con las desigualdades necesarias de modo que:

- a) No tenga solución.
- b) Su solución sea un punto.
- c) Su solución sea una semirrecta.

Sugerencias didácticas

Conviene recordar que en un sistema la solución debe cumplir todas las condiciones que lo forman. Se les puede pedir resolver varias inecuaciones y, una vez resueltas, preguntarles cuáles serían las soluciones de todas a la vez y que determinen el conjunto solución. Es importante que se den cuenta de que un sistema de inecuaciones puede no tener solución o puede ser un solo punto. Este punto se puede tratar con la propuesta del Desafío.

Soluciones de las actividades

53 Resuelve estos sistemas de inecuaciones. ¿Tienen solución siempre?

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x + 5 < 9 \\ 2x + 1 \geq -13 \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 7 \geq 5x - 3 \\ 2 - 7x < 9 \end{cases} & \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 6 \cdot (9 - 2x) \leq -3 \\ 4 \cdot (x + 1) - 12 > 0 \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} 6x - 4 \cdot (x + 6) \geq 0 \\ 3x + 5 \cdot (4 - x) \geq -4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 5 < 9 \\ 2x + 1 \geq -13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 4 \rightarrow x \in (-\infty, 4) \\ x \geq -7 \rightarrow x \in [-7, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, 4) \cap [-7, +\infty) = [-7, 4)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 7 \geq 5x - 3 \\ 2 - 7x < 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \rightarrow x \in (-\infty, 5] \\ x > -1 \rightarrow x \in (-1, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, 5] \cap (-1, +\infty) = (-1, 5]$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - 6 \cdot (9 - 2x) \leq -3 \\ 4 \cdot (x + 1) - 12 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{17}{5} \rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{17}{5}\right] \\ x > 2 \rightarrow x \in (2, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{17}{5}\right] \cap (2, +\infty) = \left(2, \frac{17}{5}\right]$$

$$\text{d) } \begin{cases} 6x - 4 \cdot (x + 6) \geq 0 \\ 3x + 5 \cdot (4 - x) \geq -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 12 \rightarrow x \in [12, +\infty) \\ x \leq 12 \rightarrow x \in (-\infty, 12] \end{cases} \rightarrow x \in [12, +\infty) \cap (-\infty, 12] = \{12\}$$

54 Representa gráficamente las soluciones de cada una de las inecuaciones y determina las de cada sistema, si las tiene.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 15x - 8 \geq 5 - (x - 3) \\ 4 - 5 \cdot (1 - 2x) < 6 + 3x \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 9 \cdot (3 - 2x) + 5 \cdot (x + 5) \geq 0 \\ -2 \cdot (6 - 5x) \leq 3 \cdot (2 - x) - 5 \end{array} \right\} \end{array}$$

Comprobar que los alumnos dibujen en ambos sistemas la semirrecta de soluciones de cada inecuación y calculen la intersección que se da a continuación:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 15x - 8 \geq 5 - (x - 3) \\ 4 - 5 \cdot (1 - 2x) < 6 + 3x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \rightarrow x \in [1, +\infty) \\ x < 1 \rightarrow x \in (-\infty, 1) \end{array} \right\} \rightarrow x \in [1, +\infty) \cap (-\infty, 1) = \emptyset \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 9 \cdot (3 - 2x) + 5 \cdot (x + 5) \geq 0 \\ -2 \cdot (6 - 5x) \leq 3 \cdot (2 - x) - 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 4 \rightarrow x \in (-\infty, 4] \\ x \leq 1 \rightarrow x \in (-\infty, 1] \end{array} \right\} \rightarrow x \in (-\infty, 4] \cap (-\infty, 1] = (-\infty, 1] \end{array}$$

55 Quita los denominadores y resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{1-3x}{3} < 1 \\ \frac{2x+1}{3} \geq \frac{5}{6} + x \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{2x}{5} - \frac{x-3}{4} \leq 0 \\ \frac{3 \cdot (1-2x)}{5} > \frac{1}{2} \end{array} \right\} \\ \text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} - \frac{x-1}{6} > \frac{5x}{3} \\ 2x + \frac{x-3}{4} < \frac{3}{8} \end{array} \right\} \\ \text{d) } \left. \begin{array}{l} \frac{7x-9}{4} \geq \frac{2-x}{3} \\ \frac{x}{7} - \frac{1-x}{2} < 1 \end{array} \right\} \\ \text{e) } \left. \begin{array}{l} 6 - \frac{x}{2} + \frac{3x}{5} \geq \frac{2x-3}{10} \\ \frac{x-6}{3} - \frac{2 \cdot (x+2)}{5} \leq -1 \end{array} \right\} \\ \text{f) } \left. \begin{array}{l} \frac{2 \cdot (x-1)}{3} - \frac{3-x}{4} > -\frac{1}{2} \\ \frac{3x}{5} + \frac{x+3}{10} < 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{1-3x}{3} < 1 \\ \frac{2x+1}{3} \geq \frac{5}{6} + x \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 6} \left. \begin{array}{l} 3x - 2 + 6x < 6 \\ 4x + 2 \geq 5 + 6x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{8}{9} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{8}{9}) \\ x \leq -\frac{3}{2} \rightarrow x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \end{array} \right\} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{8}{9}) \cap (-\infty, -\frac{3}{2}] = (-\infty, -\frac{3}{2}]$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{2x}{5} - \frac{x-3}{4} \leq 0 \\ \frac{3 \cdot (1-2x)}{5} > \frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 20} \left. \begin{array}{l} 8x - 5x + 15 \leq 0 \\ 6 - 12x \geq 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq -5 \rightarrow x \in (-\infty, -5] \\ x \leq \frac{1}{12} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{12}] \end{array} \right\} \rightarrow x \in (-\infty, -5] \cap (-\infty, \frac{1}{12}] = (-\infty, -5]$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} - \frac{x-1}{6} > \frac{5x}{3} \\ 2x + \frac{x-3}{4} < \frac{3}{8} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 12} \left. \begin{array}{l} 9 - 2x + 2 > 20x \\ 16x + 2x - 6 < 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{1}{2} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \\ x < \frac{1}{2} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2})$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} \frac{7x-9}{4} \geq \frac{2-x}{3} \\ \frac{x}{7} - \frac{1-x}{2} < 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 14} \left. \begin{array}{l} 21x - 27 \geq 8 - 4x \\ 2x - 7 + 7x < 14 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq \frac{7}{5} \rightarrow x \in [\frac{7}{5}, +\infty) \\ x < \frac{7}{3} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{7}{3}) \end{array} \right\} \rightarrow x \in [\frac{7}{5}, +\infty) \cap (-\infty, \frac{7}{3}) = [\frac{7}{5}, \frac{7}{3})$$

$$\text{e) } \left. \begin{array}{l} 6 - \frac{x}{2} + \frac{3x}{5} \geq \frac{2x-3}{10} \\ \frac{x-6}{3} - \frac{2 \cdot (x+2)}{5} \leq -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 30} \left. \begin{array}{l} 60 - 5x + 6x \geq 2x - 3 \\ 5x - 30 - 6x - 12 \leq -15 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 63 \rightarrow x \in (-\infty, 63] \\ x \geq -27 \rightarrow x \in [-27, +\infty) \end{array} \right\} \\ \rightarrow x \in (-\infty, 63] \cap [-27, +\infty) = [-27, 63]$$

$$\text{f) } \left. \begin{array}{l} \frac{2 \cdot (x-1)}{3} - \frac{3-x}{4} > -\frac{1}{2} \\ \frac{3x}{5} + \frac{x+3}{10} < 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 10} \left. \begin{array}{l} 8x - 8 - 9 + 3x > -6 \\ 6x + x + 3 < 10 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 1 \rightarrow x \in (1, +\infty) \\ x < 1 \rightarrow x \in (-\infty, 1) \end{array} \right\} \rightarrow x \in (1, +\infty) \cap (-\infty, 1) = \emptyset$$

56 Escribe sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita que tengan la solución que se indica.

- a) $[-5, 1]$ b) $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$ c) $(-\infty, -3]$ d) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ e) No tiene solución. f) $x = 3$

Respuesta abierta. Los que se proponen son los ejemplos más sencillos:

- a) $\begin{cases} 3x + 6 \geq -9 \\ x + 1 \geq 3x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > -3 \\ 2x \leq -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \leq -3 \\ x < 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x > 2 \\ x > 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases}$

57 Resuelve.

- a) $-1 \leq 3x - 1 \leq 5$ b) $1 < 2 - x < 3$ c) $-18 < 3x - 10 \leq 8$ d) $-7 \leq 1 - 2x \leq -3$

a) $0 \leq 3x \leq 6 \rightarrow 0 \leq x \leq 2 \rightarrow x \in [0, 2]$

b) $-1 < -x < 1 \rightarrow 1 > x > -1 \rightarrow x \in (-1, 1)$

c) $-8 < 3x \leq 18 \rightarrow -\frac{8}{3} < x \leq 6 \rightarrow x \in \left(-\frac{8}{3}, 6\right]$

d) $-8 \leq -2x \leq -4 \rightarrow 4 \geq x \geq 2 \rightarrow x \in [2, 4]$

58 Determina, si es posible, la solución de estos sistemas.

- a) $\begin{cases} 2x - 3 > -9 \\ -2 \leq x + 3 \\ 4x + 5 < 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 3 - 7x \\ 4 \cdot (x - 1) + 6 > 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x+3}{2} \geq 5 \\ 5 - 7x > -2 \\ 2x - 3 < 3x - 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 3 \cdot (3x - 2) > 0 \\ 6x - 3 > -2 \cdot (x - 2) \\ 2x + \frac{1}{3} < 3 \end{cases}$

- a) $\begin{cases} x > -3 \\ -5 \leq x \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow x \in \left(-3, \frac{5}{2}\right)$ b) $\begin{cases} x > \frac{3}{8} \\ x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow x \in \left(\frac{3}{8}, 1\right]$ c) $\begin{cases} x \geq 7 \\ 1 > x \\ -1 < x \end{cases} \rightarrow x \in \emptyset$ d) $\begin{cases} \frac{3}{2} > x \\ x > \frac{7}{8} \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow x \in \left(\frac{7}{8}, \frac{4}{3}\right)$

59 Halla las soluciones de estos sistemas de inecuaciones de grado mayor que uno.

- a) $\begin{cases} -2 \geq 3x^2 + 7x \\ 2x \cdot (x + 5) \leq x - 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + 5 \geq 3 \cdot (x + 1) \\ \frac{5+x}{3} - \frac{x+6}{2} < -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 < 3x \\ x^2 - 1 < \frac{3x}{2} \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x^2 - 7 \leq x - 1 \\ 7 - 3 \cdot (x + 1) < 2x - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 - 1 \leq 7 \\ \frac{3x-1}{2} \geq x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 1 \geq x^2 \\ x^2 + x > 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 0 \geq 3x^2 + 7x + 2 \\ 2x^2 + 9x + 10 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+2) \cdot (3x+1) \leq 0 \\ (x+2) \cdot (2x+5) \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in \left[-2, -\frac{1}{3}\right] \\ x \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right] \end{cases} \rightarrow x = -2$

b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ 7 - 3 \cdot (x + 1) < 2x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+2) \cdot (x-3) \leq 0 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in [-2, 3] \\ x \in (1, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in [-2, 3] \cap (1, +\infty) = (1, 3]$

c) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 10 + 2x - 3x - 18 < -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (x-2) \geq 0 \\ -2 < x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \\ x \in (-2, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in (-2, 1] \cup [2, +\infty)$

d) $\begin{cases} 2x^2 - 8 \leq 0 \\ 3x - 1 \geq 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (x-2) \cdot (x+2) \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in [-2, 2] \\ x \in [1, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in [-2, 2] \cap [1, +\infty) = [1, 2]$

$$\text{e) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x < 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \cdot (x - 3) < 0 \\ (x - 2) \cdot (2x + 1) < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in (0, 3) \\ x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \end{array} \right\} \rightarrow x \in (0, 3) \cap \left(-\frac{1}{2}, 2\right) = (0, 2)$$

$$\text{f) } \left. \begin{array}{l} 0 \geq x^2 - 1 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} (x + 1) \cdot (x - 1) \leq 0 \\ (x + 2) \cdot (x - 1) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in [-1, 1] \\ x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \end{array} \right\} \rightarrow x \in \emptyset$$

- 60** Rocío y Raúl se encontraron en la papelería al ir a comprar bolígrafos. Rocío quería 3, pero no tenía suficiente para pagarlos con los 2 € que llevaba. Raúl, sin embargo, iba a adquirir 6 y le sobraba con el billete de 5 € que tenía. Tras ponerse de acuerdo, pagaron todos los bolígrafos entre los dos. ¿Entre qué valores se encuentra el precio de un bolígrafo?

Si llamamos x al precio de un bolígrafo, en €, obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rocío: } 3x > 2 \\ \text{Raúl: } 6x < 5 \\ \text{Ambos: } 9x < 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x > \frac{2}{3} \\ x < \frac{5}{6} \\ x < \frac{7}{9} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \\ x \in \left(-\infty, \frac{5}{6}\right) \\ x \in \left(-\infty, \frac{7}{9}\right) \end{array} \right\} \rightarrow x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right)$$

El precio de un bolígrafo está entre 0,67 € y 0,78 €.

- 61** Una fábrica produce láminas rectangulares con imágenes decorativas cuya base es el doble que la altura. Los tamaños oscilan entre los 1458 cm² y los 6050 cm². ¿Entre qué dimensiones varían las láminas?

Si llamamos x a la altura de la lámina, en centímetros, la longitud de la base será $2x$, también en centímetros.

Luego el área será: $1458 \leq 2x \cdot x \leq 6050$

$$\left. \begin{array}{l} 1458 \leq 2x^2 \\ 2x^2 \leq 6050 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq x^2 - 729 \\ x^2 - 3025 \leq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} (x + 27) \cdot (x - 27) \geq 0 \\ (x + 55) \cdot (x - 55) \leq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in (-\infty, -27] \cup [27, +\infty) \\ x \in [-55, 55] \end{array} \right\} \rightarrow x \in [27, 55]$$

Las dimensiones de las láminas varían entre 54 cm × 27 cm y 55 cm × 110 cm.

Desafío

- 62** Considera el sistema: $\left. \begin{array}{l} 3 - 4 \cdot (x - 2) \square 8 \\ -2 + x \square 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{array} \right\}$. Complétalo en tu cuaderno con las desigualdades necesarias de modo que:

- a) No tenga solución. b) Su solución sea un punto. c) Su solución sea una semirrecta.

$$\text{Primero simplificamos el sistema: } \left. \begin{array}{l} 3 - 4 \cdot (x - 2) \square 8 \\ -2 + x \square 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \square 4x \\ 12x \square 9 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \square x \\ x \square \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

Para que:

$$\text{a) No tenga solución: } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} > x \\ x > \frac{3}{4} \end{array} \right\}, \text{ y por tanto: } \left. \begin{array}{l} 3 - 4 \cdot (x - 2) > 8 \\ -2 + x > 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{U otras soluciones cambiando los iguales: } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \geq x \\ x < \frac{3}{4} \end{array} \right\}, \text{ y por tanto: } \left. \begin{array}{l} 3 - 4 \cdot (x - 2) \geq 8 \\ -2 + x < 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} < x \\ x \leq \frac{3}{4} \end{array} \right\}, \text{ y por tanto: } \left. \begin{array}{l} 3 - 4 \cdot (x - 2) < 8 \\ -2 + x \leq 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{b) Su solución sea un punto: } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \geq x \\ x \geq \frac{3}{4} \end{array} \right\}, \text{ y por tanto: } \left. \begin{array}{l} 3 - 4 \cdot (x - 2) \geq 8 \\ -2 + x \geq 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{c) Su solución sea una semirrecta: } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \geq x \\ x \geq \frac{3}{4} \end{array} \right\}, \text{ y por tanto: } \left. \begin{array}{l} 3 - 4 \cdot (x - 2) \geq 8 \\ -2 + x \leq 18 - 11 \cdot (x + 1) \end{array} \right\}$$

¿Qué tienes que saber?

5

¿QUÉ tienes que saber?

Ten en cuenta

- Método de sustitución**
- Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
 - Se sustituye en la otra y se resuelve.
- Método de igualación**
- Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
 - Se iguala y se resuelve.
- Método de reducción**
- Se halla un sistema equivalente con coeficientes opuestos en una de las incógnitas.
 - Se suman las ecuaciones y se resuelve.

Sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve los siguientes sistemas e indica de qué tipo son según el número de soluciones.

a) $\begin{cases} -3x + y = 5 \\ 7x + 5y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -5x + 2y = 3 \\ 15x - 6y = 9 \end{cases}$

- a) Por sustitución: $y = 5 + 3x \rightarrow 7x + 5 \cdot (5 + 3x) = 3 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 5 + 3 \cdot (-1) = 2$
 La solución $(-1, 2)$ es única. Es un sistema compatible determinado.

b) Si aplicamos el método de igualación:

$$\begin{cases} y = 5 + 3x \\ y = 2x + 5 \end{cases} \rightarrow 5 + 3x = 2x + 5 \rightarrow 0 \cdot x = 0 \text{ Es válido para cualquier } x.$$

Hay infinitas soluciones. Se trata de un sistema compatible indeterminado.

c) Utilizando el método de reducción, tendríamos:

$$\begin{cases} -5x + 2y = 3 \\ -5x + 2y = 9 \end{cases} \rightarrow 0x + 0y = 6 \text{ Luego, } 0x + 0y = 6, \text{ que es falso.}$$

El sistema no tiene solución. Es un sistema incompatible.

Ten en cuenta

- Para resolver un sistema no lineal, aplicamos el método más adecuado de entre los utilizados para los sistemas lineales. Después, en la ecuación resultante aplicamos el procedimiento de resolución correspondiente al tipo de ecuación obtenida.

Sistemas de ecuaciones no lineales

Resuelve estos sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

a) Por el método de sustitución:

$$\begin{cases} y = 7 - x \\ x \cdot y = 10 \end{cases} \rightarrow x \cdot (7 - x) = 10$$

$$7x - x^2 = 10 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 5 \rightarrow (2, 5) \\ x_2 = 5 \rightarrow y_2 = 2 \rightarrow (5, 2) \end{cases}$$

b) Por el método de reducción:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 1 \\ (2x^2 + y^2 = 3) \cdot 2 \rightarrow 4x^2 + 2y^2 = 6 \\ \hline 7x^2 = 7 \end{cases}$$

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \\ x_2 = -1 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $(\pm 1, \pm 1)$

Ten en cuenta

- Buscamos el conjunto de soluciones de cada inecuación por separado. La solución del sistema es la intersección de todas las soluciones.

Sistemas de inecuaciones lineales

Resuelve el sistema de inecuaciones y determina gráficamente el conjunto de soluciones.

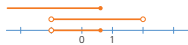
$$\begin{cases} -3 < 2x - 1 < 3 \\ 4 - 5x \geq 1 \end{cases}$$

Resolvemos las inecuaciones por separado:

$$-3 < 2x - 1 < 3 \rightarrow -2 < 2x < 4 \rightarrow -1 < x < 2$$

$$4 - 5x \geq 1 \rightarrow -5x \geq -3 \rightarrow x \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{Solución: } x \in \left(-1, \frac{3}{5}\right]$$



Actividades Finales

5

Sistemas de ecuaciones lineales

63 Comprueba si el par $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ x - 4y = \frac{7}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = -\frac{1}{4} \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = \frac{5}{4} \end{cases}$

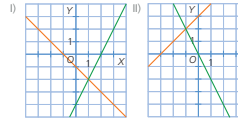
64 Determina los valores de m y n para que el par $(-2, -1)$ sea solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} mx + y = -5 \\ 3x + ny = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx + y = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}x + ny = -\frac{1}{6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + my = -1 \\ rx + 5y = -17 \end{cases}$ d) $\begin{cases} mx + y = -4 \\ rx + y = 1 \end{cases}$

65 Relaciona cada sistema con su resolución gráfica.

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$



66 Resuelve gráficamente los sistemas propuestos e indica el número de soluciones en cada caso.

a) $\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 1 \\ 2x + 5y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = -4 \\ -6x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -3x + 4y = -15 \end{cases}$

67 Clasifica de forma razonada los siguientes sistemas según su número de soluciones sin resolverlos previamente.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ -2x + 5y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -7x + 11y = -4 \\ 14x - 22y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -6x + 4y = 12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 16x + 9y = 4 \\ -4x - 3y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - 14y = 12 \\ \frac{3}{2}x - 3y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -4x + 3y = 7 \\ 28x - 21y = -49 \end{cases}$

68 Fijate en este sistema:

$$\begin{cases} x + 5y = -2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Escribe una segunda ecuación para que el sistema sea:

- a) Compatible determinado.
 b) Compatible indeterminado.
 c) Incompatible.

Resuélvelo luego gráficamente en los casos en los que sea posible.

69 Considera el sistema:

$$\begin{cases} (k+1)x - 2y = 4 \\ -9x + 3y = 6 \end{cases}$$

Determina, si es posible, para qué valores de k el sistema:

- a) Tiene infinitas soluciones.
 b) No tiene solución.
 c) Tiene solución única.

70 Resuelve e indica qué tipo de sistema es atendiendo al resultado obtenido.

a) $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 7 + 2y + x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 - 2x = \frac{1-y}{3} \\ y = \frac{3+y}{2} + 3x \end{cases}$

71 Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ -3x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ 2x - 7y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

72 Halla las soluciones de estos sistemas por el método de igualación.

a) $\begin{cases} 3x + y = -9 \\ 5x - y = -7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x + 2y = 5 \\ 5x - 6y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 5y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - 3y = 17 \\ 9x + 7y = -3 \end{cases}$

73 Aplica el método de reducción para resolver los sistemas.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ 5x - 9y = -13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4x + 11y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -7x + 4y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 3x + \frac{y}{3} = -1 \end{cases}$

Sugerencias didácticas

En esta sección se destacan los procedimientos más importantes que los alumnos deben haber aprendido tras estudiar esta unidad. En este momento, los alumnos deben ser capaces de:

- Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por sustitución, igualación y reducción.
- Clasificar los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a su número de soluciones.
- Resolver sistemas de ecuaciones no lineales aplicando el método más adecuado en cada caso.
- Determinar el conjunto de soluciones de un sistema de inecuaciones lineales.

Actividades finales

Soluciones de las actividades

63 Comprueba si el par $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ x - 4y = \frac{7}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -\frac{1}{4} \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = \frac{5}{4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -2 \\ \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \text{Es solución.}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 2 \neq -1 \end{cases} \rightarrow \text{No es solución.}$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) &= -5 \neq 5 \\ -2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) &= -4 \neq 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No es solución.}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) &= -1 \\ \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right) &= \frac{5}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Es solución.}$$

64 Determina los valores de m y n para que el par $(-2, -1)$ sea solución de los siguientes sistemas.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{aligned} mx + y &= -5 \\ 3x + ny &= -4 \end{aligned} \right\} & \text{b) } \left. \begin{aligned} -x + my &= -1 \\ nx + 5y &= -17 \end{aligned} \right\} & \text{c) } \left. \begin{aligned} mx + y &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}x + ny &= -\frac{1}{6} \end{aligned} \right\} & \text{d) } \left. \begin{aligned} mx + y &= -4 \\ nx + y &= 1 \end{aligned} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} m \cdot (-2) + (-1) &= -5 \\ 3 \cdot (-2) + n \cdot (-1) &= -4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} -2m - 1 &= -5 \\ -6 - n &= -4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} m &= 2 \\ n &= -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} m \cdot (-2) + (-1) &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot (-2) + n \cdot (-1) &= -\frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} -2m - 1 &= \frac{1}{3} \\ -1 - n &= -\frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} m &= -\frac{2}{3} \\ n &= -\frac{5}{6} \end{aligned} \right\}$$

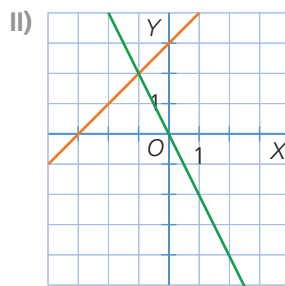
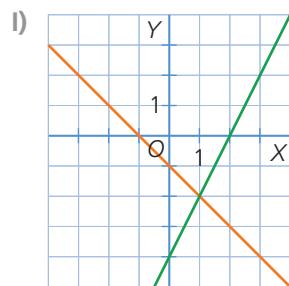
$$\text{b) } \left. \begin{aligned} -(-2) + m \cdot (-1) &= -1 \\ n \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) &= -17 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 2 - m &= -1 \\ -2n - 5 &= -17 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} m &= 3 \\ n &= 6 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} m \cdot (-2) + (-1) &= -4 \\ n \cdot (-2) + (-1) &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} -2m - 1 &= -4 \\ -2n - 1 &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} m &= \frac{3}{2} \\ n &= -1 \end{aligned} \right\}$$

65 Relaciona cada sistema con su resolución gráfica.

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} x + y &= -1 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} -x + y &= 3 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned} \right\}$$



a) I)

b) II)

66 Resuelve gráficamente los sistemas propuestos e indica el número de soluciones en cada caso.

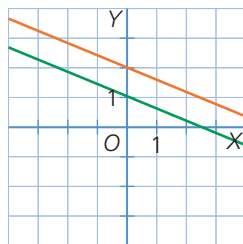
$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y &= 1 \\ 2x + 5y &= 5 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} x - 3y &= 2 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

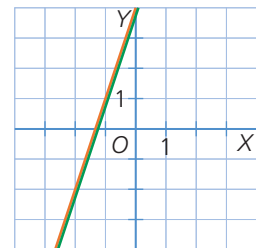
$$\text{c) } \left. \begin{aligned} 3x - y &= -4 \\ -6x + 2y &= 8 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -3x + 4y &= -15 \end{aligned} \right\}$$

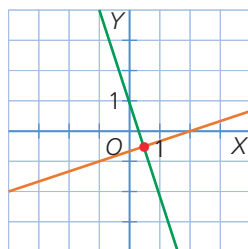
a) Incompatible
No tiene solución.



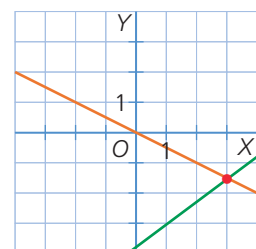
c) Compatible indeterminado
Tiene infinitas soluciones.



b) Compatible determinado
Tiene solución única.



d) Compatible determinado
Tiene solución única.



67 Clasifica de forma razonada los siguientes sistemas según su número de soluciones sin resolverlos previamente.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ -2x + 5y = -7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 7x - 14y = 12 \\ \frac{3}{2}x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 16x + 9y = 4 \\ -4x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -6x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -7x + 11y = -4 \\ 14x - 22y = 8 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} -4x + 3y = 7 \\ 28x - 21y = -49 \end{cases}$$

$$\text{a) } \frac{2}{-2} \neq \frac{5}{5} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$$\text{d) } \frac{-7}{14} = \frac{11}{-22} = \frac{-4}{8} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\text{b) } \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} \neq \frac{6}{12} \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$$\text{e) } \frac{16}{-4} \neq \frac{9}{-3} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$$\text{c) } \frac{7}{\frac{3}{2}} = \frac{-14}{-3} \neq \frac{12}{3} \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$$\text{f) } \frac{-4}{28} = \frac{3}{-21} = \frac{7}{-49} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

68 Fíjate en este sistema: $\begin{cases} x + 5y = -2 \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$

Escribe una segunda ecuación para que el sistema sea:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

c) Incompatible.

Resuélvelo luego gráficamente en los casos en los que sea posible.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 5y = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ Gráficamente los alumnos deben obtener rectas secantes.}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 5y = -2 \\ 2x + 10y = -4 \end{cases} \text{ Gráficamente los alumnos deben obtener rectas coincidentes.}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 5y = -2 \\ 2x + 10y = 0 \end{cases} \text{ Gráficamente los alumnos deben obtener rectas paralelas.}$$

69 Considera el sistema: $\begin{cases} (k+1)x - 2y = 4 \\ -9x + 3y = 6 \end{cases}$ Determina, si es posible, para qué valores de k el sistema:

a) Tiene infinitas soluciones.

b) No tiene solución.

c) Tiene solución única.

$$\text{a) } \frac{k+1}{-9} = \frac{-2}{3} \neq \frac{4}{6} \rightarrow \text{No es posible.}$$

$$\text{c) } \frac{k+1}{-9} \neq \frac{-2}{3} \rightarrow 3 \cdot (k+1) \neq 18 \rightarrow k \neq 5$$

$$\text{b) } \frac{k+1}{-9} = \frac{-2}{3} \neq \frac{4}{6} \rightarrow 3 \cdot (k+1) = 18 \rightarrow k = 5$$

70 Resuelve e indica qué tipo de sistema es atendiendo al resultado obtenido.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 7 + 2y + x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3 - 2x = \frac{1-y}{3} \\ y = \frac{3+y}{2} + 3x \end{cases}$$

$$\text{a) } 7 + 2y + (3 - 2y) = 0 \rightarrow 10 = 0 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6x - y = 8 \\ 6x - y = -3 \end{cases} \rightarrow 0 = 11 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

71 Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + 3y = -2 \\ 2x - 7y = -1 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 7 \\ -3x + y = 3 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 7x - 3y = 6 \\ 5x + 6y = 7 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 1 \\ y = 1 - 2x \end{array} \right\} \rightarrow 5x + 3 \cdot (1 - 2x) = 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -3 \rightarrow (2, -3)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3y + 2 = x \\ 2x - 7y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot (3y + 2) - 7y = -1 \rightarrow y = 5 \rightarrow x = 17 \rightarrow (17, 5)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x = \frac{7-4y}{3} \\ -3x + y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow -3 \cdot \frac{7-4y}{3} + y = 3 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \rightarrow \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x = \frac{6+3y}{7} \\ 5x + 6y = 7 \end{array} \right\} \rightarrow 5 \cdot \frac{6+3y}{7} + 6y = 7 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow x = 1 \rightarrow \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

72 Halla las soluciones de estos sistemas por el método de igualación.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + y = -9 \\ 5x - y = -7 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ -2x + 5y = 14 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} 7x + 2y = 5 \\ 5x - 6y = 11 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 4x - 3y = 17 \\ 9x + 7y = -3 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} y = -9 - 3x \\ 5x + 7 = y \end{array} \right\} \rightarrow -9 - 3x = 5x + 7 \rightarrow (-2, -3)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x = 4 - y \\ 5y - 14 = 2x \end{array} \right\} \rightarrow 4 - y = 5y - 14 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x = \frac{5-2y}{7} \\ x = \frac{11+6y}{5} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5-2y}{7} = \frac{11+6y}{5} \rightarrow (1, -1)$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x = \frac{17+3y}{4} \\ x = \frac{-3-7y}{9} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{17+3y}{4} = \frac{-3-7y}{9} \rightarrow (2, -3)$$

73 Aplica el método de reducción para resolver los sistemas.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 11 \\ 5x - 9y = -13 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 12 \\ -7x + 4y = -2 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} -4x + 11y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 5x + y = 1 \\ 3x + \frac{y}{3} = -1 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 11 \\ 5x - 9y = -13 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 11 \\ -5x + 9y = 13 \end{array} \right\} \rightarrow 12y = 24 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 2)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 12 \\ -7x + 4y = -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left. \begin{array}{l} -6x - 4y = -24 \\ -7x + 4y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow -13x = -26 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 3 \rightarrow (2, 3)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} -4x + 11y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array}} \left. \begin{array}{l} -12x + 33y = 9 \\ 12x + 8y = 32 \end{array} \right\} \rightarrow 41y = 41 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 1)$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 5x + y = 1 \\ 3x + \frac{y}{3} = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot(-3)} \left. \begin{array}{l} 5x + y = 1 \\ -9x - y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow -4x = 4 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 6 \rightarrow (-1, 6)$$

5 Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones

74 Simplifica y resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más adecuado.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 4 - 5 \cdot (x + 2y) = 2 - 6y \\ 3 \cdot (x + 1) - 2 \cdot (7 - y) = -5 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} 3x = 2 \cdot (5 + y) - 4x - 1 \\ 7x - 2 \cdot (y - 2) = 8 - 5y \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} 3 \cdot (2x + 7) - 9 = 5y - 10 \\ 12 + 2 \cdot (4 - 3y) = -(3x - y) \end{cases} \end{aligned}$$

75 Halla la solución de los siguientes sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \frac{4 \cdot (x-1)}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3y+2}{10} \\ \frac{x+1}{6} + y + 2 = \frac{17}{3} \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = -1 \\ \frac{x+1}{4} - \frac{3y}{2} = -3 \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} \frac{9-7x}{15} + 2y = \frac{4}{3} \\ \frac{x+5}{6} + \frac{6-y}{4} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones no lineales

76 Halla todas las soluciones.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x \cdot y = -5 \\ x + 2y = -3 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 3x + 2y^2 - 1 = 7 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} x^2 + y = 10 \\ 5x - 2y = -2 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} (3x+2) \cdot y = -4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

77 Resuelve y comprueba las soluciones de estos sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2x + y = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{4}{y} = \frac{4}{3} \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} 4 - 5x = 2y \\ \frac{3}{x} + \frac{1+4y}{xy} = \frac{4}{y} \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{1}{y-1} = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

78 Averigua todas las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 1 - \sqrt{2y-1} = x \\ x + 2y = 8 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ -3x^2 + y^2 = -3 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} \sqrt{y+3} = 7 + x \\ \frac{\sqrt{9+x}}{2} = \sqrt{y} \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 3x^2 = 5y^2 - 2 \\ 2x^2 + 3 = 4 + y^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

79 Aplica las propiedades de las potencias y resuelve.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 3^{2x} = 81^2 \\ 3^{2x+y} = 27 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 25^x \cdot 5^y = 1 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} 8^{x-2}y = 1 \\ 343^x = 7^{3y} \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 3^x = \frac{3}{3^y} \\ 3^x = 27 \cdot 9^y \end{cases} \end{aligned}$$

80 Averigua las soluciones aplicando el cambio de variable adecuado en cada caso.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 3^x - 3^y = 24 \\ 3^{x-y} = 9 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} 10^x - 10^{y-1} = 99 \\ 10^{x-3} \cdot 10^y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

81 Resuelve aplicando previamente la definición de logaritmo.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \log_2 y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} \log_2 (x-1) = 0 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

82 Determina las soluciones utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2 y \\ x - 3y = 2 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2 + \log_2 3 \\ \log_2 (x+1) - \frac{1}{2} \log_2 y = 1 \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} 2 \log (x-1) + \log 2 = 1 + \log y \\ \log (x-1) - \log y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sistemas de inecuaciones

83 Representa las soluciones de cada una de las inecuaciones en la recta real y expresa la solución del sistema en forma de intervalo.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2x - 3 \geq 1 - x \\ 2x > 3 - 2x \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 3 \cdot (x-1) > 7 - 2x \\ -14 + 3x > 5x + 2 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} 2x + 5 \geq x - 2 \\ 15 + 3x \leq x + 1 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 1 - 5 \cdot (x+2) < -8x \\ 5 \cdot (3x-1) \geq 9x + 13 \end{cases} \end{aligned}$$

84 Determina el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} -5 < \frac{2x-1}{3} \\ 5 > \frac{2x-1}{3} \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} \frac{3x+5}{4} - \frac{x+1}{2} > 1 \\ \frac{2-x}{4} + \frac{1-x}{3} < \frac{10+3x}{-2} \end{cases} \end{aligned}$$

Actividades Finales

85 Resuelve.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} -3 \leq 2 - 5x \leq 3 \\ \frac{1}{2} < \frac{x-2}{3} < 1 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} -1 \leq 2x - 5 \leq 5 \\ 1 < \frac{x-2}{3} < 1 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} \frac{3}{4} < \frac{5-3x}{2} < 1 \\ 0 \leq x+1 \leq 1 \\ 1 \leq 2-3x \leq 3 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 0 \leq x+1 \leq 1 \\ 1 \leq 2-3x \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

86 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones de segundo grado.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x^2 > 1 \\ 3x - 7 < 4 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 7x \geq -x^2 \\ x + 7 \cdot (x+2) > 5x - 1 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} x^2 + 2 < 3x \\ 3x + 1 \leq 5 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} 1 \leq 4x^2 \\ 3 \cdot (x+3) > 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolución de problemas con sistemas

87 Averigua un número sabiendo que la suma de sus cifras es 4 y que, si invertimos el orden de las mismas, obtenemos un número 18 unidades mayor.

88 En clase de Ramiro hay dos chicos por cada tres chicas, y en total son treinta alumnos. ¿Cuántos chicos hay? ¿Y chicas?

89 La edad de Natalia hoy es cuatro veces la de Alma. Cuando pasen la mitad de años que lleva vividos Alma, Natalia tendrá 45 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

90 Mario tiene en el bolsillo 8 € en monedas de 1 € y 50 c. Si cambia las monedas de 1 € por monedas de 50 c. y las de 50 c. por monedas de 1 €, tendrá 0,50 € más. ¿Cuántas monedas de cada clase tiene Mario en el bolsillo?

91 Alonso invierte un total de 20000 € en dos productos financieros. El primero le aporta un rendimiento del 6% y el segundo del 9,5%. Si ha obtenido unos beneficios totales de 1445 €, ¿cuánto invirtió en cada producto?

92 Rebeca se ha comprado en las rebajas dos falidas y tres camisas que estaban 139 €. Le han aplicado un descuento del 15% en las falidas y del 10% en las camisas, con lo que tiene que pagar 121,60 €. ¿Cuánto costaba cada artículo antes de rebajarlos?



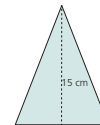
5

93 Un campo de fútbol sala tiene un perímetro de 130 m y una superficie de 1000 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?



94 Calcula el largo y el ancho de un rectángulo de 12 dm² de área y 5 dm de diagonal.

95 Determina la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que:
 ■ Su perímetro mide 50 cm.
 ■ Su altura sobre el lado desigual mide 15 cm.



96 Halla dos números cuya suma valga $\frac{21}{4}$ y cuyos inversos sumen $\frac{7}{4}$.

97 Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. ¿Cuánto tardará cada uno por separado si con los dos abiertos el depósito se llena en 4 min?

98 Felipe está haciendo el Camino de Santiago y ha observado que camina a una velocidad de entre 4 km/h y 6 km/h, según la etapa. Además, suele parar una hora a descansar a lo largo del recorrido. ¿Cuánto tiempo le puede llevar una etapa de 22 km?

99 Amalia ha llamado al servicio técnico para que le vengan a casa a reparar la caldera. Le han dicho que le cobrarán 25 €/h por la mano de obra y 10 € de desplazamiento más el IVA. El técnico ha estimado que la reparación costará entre 55 € y 60 €. ¿Cuánto tiempo espera tardar el técnico en arreglar la avería? (Dato: IVA = 21 %).



74 Simplifica y resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más adecuado.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 4 - 5 \cdot (x + 2y) = 2 - 6y \\ 3 \cdot (x + 1) - 2 \cdot (7 - y) = -5 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} 3x = 2 \cdot (5 + y) - 4x - 1 \\ 7x - 2 \cdot (y - 2) = 8 - 5y \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 3 \cdot (2x + 7) - 9 = 5y - 10 \\ 12 + 2 \cdot (4 - 3y) = -(3x - y) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ -6x - 4y = -12 \end{cases} \rightarrow -x = -10 \rightarrow x = 10 \rightarrow y = -12 \rightarrow (10, -12)$$

$$\text{b) } \begin{cases} -7x + 2y = -9 \\ 7x + 3y = 4 \end{cases} \rightarrow 5y = -5 \rightarrow y = -1 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, -1)$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x - 5y = -22 \\ 3x - 7y = -20 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 6x - 5y = -22 \\ -6x + 14y = 40 \end{cases} \rightarrow 9y = 18 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 2)$$

75 Halla la solución de los siguientes sistemas.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \frac{4 \cdot (x-1)}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3y+2}{10} \\ \frac{x+1}{6} + y + 2 = \frac{17}{3} \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = -1 \\ \frac{x+1}{4} - \frac{3-y}{2} = -3 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} \frac{9-7x}{15} + 2y = \frac{4}{3} \\ \frac{x+5}{6} + \frac{6-y}{4} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 8x - 3y = 15 \\ x + 6y = 21 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 16x - 6y = 30 \\ x + 6y = 21 \end{cases} \rightarrow 17x = 51 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow (3, 3)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 6y = -15 \\ x + 2y = -7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{cases} 5x + 6y = -15 \\ -3x - 6y = 21 \end{cases} \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -5 \rightarrow (3, -5)$$

$$\text{c) } \begin{cases} -7x + 30y = 11 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-10)} \begin{cases} -7x + 30y = 11 \\ 20x - 30y = 80 \end{cases} \rightarrow 13x = 91 \rightarrow x = 7 \rightarrow y = 2 \rightarrow (7, 2)$$

76 Halla todas las soluciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x \cdot y = -5 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y = 10 \\ 5x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 2y^2 - 1 = 7 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (3x + 2) \cdot y = -4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x \cdot y = -5 \\ x = -3 - 2y \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} (-3 - 2y) \cdot y = -5 \rightarrow 2y^2 + 3y - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = -5 \rightarrow (-5, 1) \\ y_2 = -\frac{5}{2} \rightarrow x_2 = 2 \rightarrow \left(2, -\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = 10 - x^2 \\ 5x - 2y = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} 5x - 2 \cdot (10 - x^2) = -2 \rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 6 \rightarrow (2, 6) \\ x_2 = -\frac{9}{2} \rightarrow y_2 = -\frac{41}{4} \rightarrow \left(-\frac{9}{2}, -\frac{41}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 2y^2 - 1 = 7 \\ x = \frac{2-y}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} 3 \cdot \frac{2-y}{3} + 2y^2 - 1 = 7 \rightarrow 2y^2 - y - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow (0, 2) \\ y_2 = -\frac{3}{2} \rightarrow x_2 = \frac{7}{6} \rightarrow \left(\frac{7}{6}, -\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y = \frac{-4}{3x+2} \\ y = \frac{2+x}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{Igual.}} \frac{-4}{3x+2} = \frac{2+x}{4} \rightarrow 3x^2 + 8x + 20 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

77 Resuelve y comprueba las soluciones de estos sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4 - 5x = 2y \\ \frac{3}{x} - \frac{1+4y}{xy} = \frac{4}{y} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{xy} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{1}{y-1} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3y - 3x = -4xy \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} 3 \cdot (1 - 2x) - 3x = -4x \cdot (1 - 2x) \rightarrow 8x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow y_1 = 3 \rightarrow (-1, 3) \\ x_2 = \frac{3}{8} \rightarrow y_2 = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4 - 5x = 2y \\ 3y - (1 + 4y) = 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4-5x}{2} = y \\ -4x - 1 = y \end{cases} \xrightarrow{\text{Igual.}} \frac{4-5x}{2} = -4x - 1 \rightarrow x = -2 \rightarrow y = 7 \rightarrow (-2, 7)$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6y + 6x = xy \\ 6 = -xy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6y + 6x = xy \\ y = \frac{-6}{x} \end{cases} \rightarrow 6 \cdot \frac{-6}{x} + 6x = x \cdot \frac{-6}{x} \xrightarrow{\cdot x} 6x^2 + 6x - 36 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow y = 2 \rightarrow (-3, 2) \\ x = 2 \rightarrow y = -3 \rightarrow (2, -3) \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 3x + 14y - 5xy - 10 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} 3 \cdot (1 - 2y) + 14y - 5 \cdot (1 - 2y) \cdot y - 10 = 0 \rightarrow 10y^2 + 3y - 7 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \rightarrow x_1 = 3 \rightarrow (3, -1) \\ y_2 = \frac{7}{10} \rightarrow x_2 = -\frac{2}{5} \rightarrow \left(-\frac{2}{5}, \frac{7}{10}\right) \end{cases}$$

Al sustituir cada solución en el sistema inicial se observa que se cumplen las dos ecuaciones.

78 Averigua todas las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 1 - \sqrt{2y-1} = x \\ x + 2y = 8 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} \sqrt{y+3} = 7+x \\ \frac{\sqrt{9+x}}{2} = \sqrt{y} \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -5 \\ -3x^2 + y^2 = -3 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 3x^2 = 5y^2 - 2 \\ 2x^2 + 3 = 4 + y^2 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 1 - \sqrt{2y-1} = x \\ x = 8 - 2y \end{array} \right\} \rightarrow 1 - \sqrt{2y-1} = 8 - 2y \rightarrow (2y-7)^2 = (\sqrt{2y-1})^2 \rightarrow 4y^2 - 30y + 50 = 0 \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = -2 \rightarrow (-2, 5) \\ y_2 = \frac{5}{2} \rightarrow x_2 = 3 \rightarrow \left(3, \frac{5}{2}\right) \rightarrow \text{No válida} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \left. \begin{array}{l} \sqrt{y+3} = 7+x \\ 9+x = 4y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{y+3} = 7+x \\ x = 4y-9 \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{y+3} = 7 + (4y-9) \rightarrow (\sqrt{y+3})^2 = (4y-2)^2 \\ \rightarrow 16y^2 - 17y + 1 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = -5 \rightarrow (-2, 5) \\ y_2 = \frac{1}{16} \rightarrow x_2 = -\frac{35}{4} \rightarrow \left(-\frac{35}{4}, \frac{1}{16}\right) \rightarrow \text{No válida} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -5 \\ -3x^2 + y^2 = -3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Reduc.}} -2x^2 = -8 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \rightarrow y = \pm 3 \rightarrow (2, 3) \text{ y } (2, -3) \\ x_2 = -2 \rightarrow y = \pm 3 \rightarrow (-2, 3) \text{ y } (-2, -3) \end{array} \right.$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot(-5)} \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -10x^2 + 5y^2 = -5 \end{array} \right\} \rightarrow -7x^2 = -7 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow (1, 1) \text{ y } (1, -1) \\ x_2 = -1 \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow (-1, 1) \text{ y } (-1, -1) \end{array} \right.$$

79 Aplica las propiedades de las potencias y resuelve.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3^{x+y} = 81^3 \\ 3^{2x-y} = 27 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 8^{x-2y} = 1 \\ 343^2 = 7^{x+y} \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -1 \\ 25^x \cdot 5^y = 1 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 3^{3x} = \frac{3}{3^y} \\ 3^x = 27 \cdot 9^y \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3^{x+y} = (3^4)^3 \\ 3^{2x-y} = 3^3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y = 4 \cdot 3 \\ 2x-y = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} 3x = 15 \rightarrow x = 5 \rightarrow y = 7 \rightarrow (5, 7)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 8^{x-2y} = 8^0 \\ (7^3)^2 = 7^{x+y} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x-2y = 0 \\ 6 = x+y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x-2y = 0 \\ -x-y = -6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} -3y = -6 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 4 \rightarrow (4, 2)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -1 \\ (5^2)^x \cdot 5^y = 5^0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -1 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -1 \\ -4x - 2y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow -x = -1 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -2 \rightarrow (1, -2)$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 3^{3x} = 3^{1-y} \\ 3^x = 3^3 \cdot (3^2)^y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x = 1-y \\ x = 3+2y \end{array} \right\} \rightarrow 3 \cdot (3+2y) = 1-y \rightarrow y = -\frac{8}{7} \rightarrow x = \frac{5}{7} \rightarrow \left(\frac{5}{7}, -\frac{8}{7}\right)$$

80 Averigua las soluciones aplicando el cambio de variable adecuado en cada caso.

$$\text{a) } \begin{cases} 3^x - 3^y = 24 \\ 3^{x-y} = 9 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 10^x - 10^{y-1} = 99 \\ 10^{x-3} \cdot 10^y = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3^x - 3^y = 24 \\ \frac{3^x}{3^y} = 9 \end{cases} \xrightarrow{\substack{3^x = z \\ 3^y = t}} \begin{cases} z - t = 24 \\ \frac{z}{t} = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 24 + t \\ z = 9 \cdot t \end{cases} \rightarrow 24 + t = 9t \rightarrow t = 3 = 3^y \rightarrow y = 1 \\ z = 27 = 3^x \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 1)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 10^x - \frac{10^y}{10} = 99 \\ \frac{10^x}{10^3} \cdot 10^y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{10^x = z \\ 10^y = t}} \begin{cases} z - \frac{t}{10} = 99 \\ \frac{z}{10^3} \cdot t = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{990 + t}{10} \\ z = \frac{10^3}{t} \end{cases} \rightarrow \frac{990 + t}{10} = \frac{10^3}{t} \rightarrow t^2 + 990t - 10^4 = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} t = 10 = 10^y \rightarrow y = 1 \rightarrow z = 100 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 1) \\ t = -1000 \rightarrow \text{No válida} \end{cases}$$

81 Resuelve aplicando previamente la definición de logaritmo.

$$\text{a) } \begin{cases} \log_x y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} \log_y (x - 1) = 0 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^{-1} \\ x - 3y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sust.}} x - 3 \cdot \frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{\cdot x} x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{No válida} \\ x = 3 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow \left(3, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 1 = y^0 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases} \rightarrow 5 \cdot 2 - 3y = 4 \rightarrow y = 2 \rightarrow (2, 2)$$

82 Determina las soluciones utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \begin{cases} 2 \cdot \log_5 x = 2 + \log_5 y \\ x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2 + \log_2 3 \\ \log_2 (x + 1) - \frac{1}{2} \cdot \log_2 y = 1 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} 2 \log (x - 1) + \log 2 = 1 + \log y \\ \log (x - 1) - \log y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} \log_5 x^2 = \log_5 (5^2 \cdot y) \\ x - 3y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 25y \\ x = 2 + 3y \end{cases} \rightarrow (2 + 3y)^2 = 25y \rightarrow 9y^2 - 13y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 1 \rightarrow x = 5 \rightarrow (5, 1) \\ y = \frac{4}{9} \rightarrow x = \frac{10}{3} \rightarrow \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{9}\right) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_2 x \cdot y = \log_2 2^2 \cdot 3 \\ \log_2 \frac{x+1}{\sqrt{y}} = \log_2 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 12 \\ \frac{x+1}{\sqrt{y}} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ (x+1)^2 = (2\sqrt{y})^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ x^2 + 2x + 1 = 4y \end{cases} \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \cdot \frac{12}{x} \\ \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 48 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 4 \rightarrow (3, 4)$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log (x - 1)^2 \cdot 10^2 = \log 10 \cdot y \\ \log \frac{x-1}{y} = \log 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 \cdot 10^2 = 10 \cdot y \\ x - 1 = y \end{cases} \rightarrow y^2 \cdot 10^2 = 10 \cdot y \rightarrow 10y \cdot (10y - 1) = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{No válida} \\ y = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{11}{10} \rightarrow \left(\frac{11}{10}, \frac{1}{10}\right) \end{cases}$$

83 Representa las soluciones de cada una de las inecuaciones en la recta real y expresa la solución del sistema en forma de intervalo.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3 \geq 1 - x \\ 2x > 3 - 2x \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + 5 \geq x - 2 \\ 15 + 3x \leq x + 1 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} 3 \cdot (x - 1) > 7 - 2x \\ -14 + 3x > 5x + 2 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 1 - 5 \cdot (x + 2) < -8x \\ 5 \cdot (3x - 1) \geq 9x + 13 \end{array} \right\} \end{array}$$

Comprobar que los alumnos representan el intervalo indicado en la recta real.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3 \geq 1 - x \\ 2x > 3 - 2x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq \frac{4}{3} \rightarrow x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty \right) \\ x > \frac{3}{4} \rightarrow x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty \right) \end{array} \right\} \rightarrow x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty \right) \cap \left(\frac{3}{4}, +\infty \right) = \left[\frac{4}{3}, +\infty \right)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + 5 \geq x - 2 \\ 15 + 3x \leq x + 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq -7 \rightarrow x \in [-7, +\infty) \\ x \leq -7 \rightarrow x \in (-\infty, -7] \end{array} \right\} \rightarrow x \in [-7, +\infty) \cap (-\infty, -7] = \{-7\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 3 \cdot (x - 1) > 7 - 2x \\ -14 + 3x > 5x + 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2 \rightarrow x \in (2, +\infty) \\ -8 > x \rightarrow x \in (-\infty, -8) \end{array} \right\} \rightarrow x \in (2, +\infty) \cap (-\infty, -8) = \emptyset$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 1 - 5 \cdot (x + 2) < -8x \\ 5 \cdot (3x - 1) \geq 9x + 13 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x < 3 \rightarrow x \in (-\infty, 3) \\ x \geq 6 \rightarrow x \in [6, +\infty) \end{array} \right\} \rightarrow x \in (-\infty, 3) \cap [6, +\infty) = \emptyset$$

84 Determina el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} -5 < \frac{2x-1}{3} \\ 5 > \frac{2x-1}{3} \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{3x+5}{4} - \frac{x+1}{2} > 1 \\ \frac{2-x}{4} + \frac{1-x}{3} < \frac{10+3x}{2} \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} -15 < 2x - 1 \\ 15 > 2x - 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -7 < x \rightarrow x \in (-7, +\infty) \\ 8 > x \rightarrow x \in (-\infty, 8) \end{array} \right\} \rightarrow x \in (-7, +\infty) \cap (-\infty, 8) = (-7, 8)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 5 - 2x - 2 > 4 \\ 6 - 3x + 4 - 4x < 60 + 18x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 1 \rightarrow x \in (1, +\infty) \\ -2 < x \rightarrow x \in (-2, +\infty) \end{array} \right\} \rightarrow x \in (1, +\infty) \cap (-2, +\infty) = (1, +\infty)$$

85 Resuelve.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } -3 \leq 2 - 5x \leq 3 & \text{b) } \frac{3}{4} < \frac{5-3x}{2} < 1 & \text{c) } \left. \begin{array}{l} -1 \leq 2x - 5 \leq 5 \\ \frac{1}{2} < \frac{x-2}{3} < 1 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 0 \leq x + 1 \leq 1 \\ 1 \leq 2 - 3x \leq 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } -3 \leq 2 - 5x \leq 3 \rightarrow -5 \leq -5x \leq 1 \rightarrow 1 \geq x \geq -\frac{1}{5} \rightarrow x \in \left[-\frac{1}{5}, 1 \right]$$

$$\text{b) } \frac{3}{4} < \frac{5-3x}{2} < 1 \rightarrow 3 < 10 - 6x < 4 \rightarrow -7 < -6x < -6 \rightarrow \frac{7}{6} > x > 1 \rightarrow x \in \left(1, \frac{7}{6} \right)$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} -1 \leq 2x - 5 \leq 5 \\ \frac{1}{2} < \frac{x-2}{3} < 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \leq 2x \leq 10 \\ 3 < 2x - 4 < 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 5 \\ 7 < 2x < 10 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 5 \\ \frac{7}{2} < x < 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in [2, 5] \\ x \in \left(\frac{7}{2}, 5 \right) \end{array} \right\} \rightarrow x \in [2, 5] \cap \left(\frac{7}{2}, 5 \right) = \left(\frac{7}{2}, 5 \right)$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 0 \leq x + 1 \leq 1 \\ 1 \leq 2 - 3x \leq 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq x + 1 \leq 1 \\ -1 \leq -3x \leq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{3} \geq x \geq -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in [-1, 0] \\ x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] \end{array} \right\} \rightarrow x \in [-1, 0] \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] = \left[-\frac{1}{3}, 0 \right]$$

86 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones de segundo grado.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 > 1 \\ 3x - 7 < 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + 2 < 3x \\ 3x + 1 \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 7x \geq -x^2 \\ x + 7 \cdot (x + 2) > 5x - 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 1 \leq 4x^2 \\ 3 \cdot (x + 3) > 9 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 > 1 \\ 3x - 7 < 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+1) \cdot (x-1) > 0 \\ x < \frac{11}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x \in \left(-\infty, \frac{11}{3}\right) \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(1, \frac{11}{3}\right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ 3x + 1 \leq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ 3x + 1 \leq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (x-2) < 0 \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in (1, 2) \\ x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \end{cases} \rightarrow x \in \left(1, \frac{4}{3}\right]$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + 7x \geq 0 \\ 8x + 14 > 5x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot (x + 7) \geq 0 \\ 3x > -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -7] \cup [0, +\infty) \\ x \in (-5, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in [0, +\infty)$$

$$\text{d) } \begin{cases} 1 - 4x^2 \leq 0 \\ 3x + 9 > 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1 - 2x) \cdot (1 + 2x) \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ x \in (0, +\infty) \end{cases} \rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

87 Averigua un número sabiendo que la suma de sus cifras es 4 y que, si invertimos el orden de las mismas, obtenemos un número 18 unidades mayor.

Si llamamos x a la cifra de la unidades e y a la cifra de las decenas, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \text{Suma de sus cifras: } x + y = 4 \\ \text{Cambiando el orden: } (10y + x) + 18 = 10x + y \end{cases}$$

Simplificando y resolviendo por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (10y + x) + 18 = 10x + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ -9x + 9y = -18 \end{cases} \xrightarrow{-9} \begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = -2 \end{cases} \rightarrow 2y = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 1)$$

Es el número 13.

88 En clase de Ramiro hay dos chicos por cada tres chicas, y en total son treinta alumnos. ¿Cuántos chicos hay? ¿Y chicas?

Si llamamos x al número de chicos e y al número de chicas, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \text{Total alumnos: } x + y = 30 \\ \text{Razón chicos/chicas: } \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Reduciendo y resolviendo por sustitución:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ 3x = 2y \end{cases} \rightarrow 3x = 2 \cdot (30 - x) \rightarrow x = 12 \rightarrow y = 18 \rightarrow (12, 18)$$

En clase hay 12 chicos y 18 chicas.

- 89 La edad de Natalia hoy es cuatro veces la de Alma. Cuando pasen la mitad de años que lleva vividos Alma, Natalia tendrá 45 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

Si llamamos x a la edad actual de Natalia e y a la edad actual de Alma, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Edades actuales: } x = 4y \\ \text{Dentro de } \frac{y}{2} \text{ años: } x + \frac{y}{2} = 45 \end{array} \right\}$$

Reduciendo y resolviendo por sustitución:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4y \\ x + \frac{y}{2} = 45 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4y \\ 2x + y = 90 \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot 4y + y = 90 \rightarrow y = 10 \rightarrow x = 40 \rightarrow (40, 10)$$

Natalia tiene 40 años y Alma 10.

- 90 Mario tiene en el bolsillo 8 € en monedas de 1 € y 50 cent. Si cambia las monedas de 1 € por monedas de 50 cent y las de 50 cent por monedas de 1 €, tendría 0,50 € más. ¿Cuántas monedas de cada clase tiene Mario en el bolsillo?

Si llamamos x al número de monedas de 1 € e y al número de monedas de 50 cent, obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Antes del cambio: } x + 0,5y = 8 \\ \text{Después del cambio: } 0,5x + y = 8,5 \end{array} \right\}$$

Resolviendo por reducción:

$$\left. \begin{array}{l} x + 0,5y = 8 \\ 0,5x + y = 8,5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left. \begin{array}{l} x + 0,5y = 8 \\ -x - 2y = -17 \end{array} \right\} \rightarrow -1,5y = -9 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 5 \rightarrow (5, 6)$$

Mario tiene 5 monedas de 1 € y 6 monedas de 50 cent.

- 91 Alonso invierte un total de 20000 € en dos productos financieros. El primero le aporta un rendimiento del 6% y el segundo del 9,5%. Si ha obtenido unos beneficios totales de 1445 €, ¿cuánto invirtió en cada producto?

Si llamamos x a la cantidad invertida en el primer producto e y a la invertida en el segundo, obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Inversión: } x + y = 20000 \\ \text{Beneficios: } 0,06x + 0,095y = 1445 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 20000 \\ 0,06x + 0,095y = 1445 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot(-6) \\ \cdot 100 \end{array}} \left. \begin{array}{l} -6x - 6y = -120000 \\ 6x + 9,5y = 144500 \end{array} \right\} \rightarrow 3,5y = 24500 \rightarrow y = 7000 \rightarrow x = 13000$$

Invirtió 13000 € en el primer producto y 7000 € en el segundo.

- 92 Rebeca se ha comprado en las rebajas dos faldas y tres camisas que costaban 139 €. Le han aplicado un descuento del 15% en las faldas y del 10% en las camisas, con lo que tiene que pagar 121,60 €. ¿Cuánto costaba cada artículo antes de rebajarlos?

Si llamamos x al precio original de una falda e y al precio original de una camisa, obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Antes de la rebaja: } 2x + 3y = 139 \\ \text{Después de la rebaja: } 0,85 \cdot 2x + 0,9 \cdot 3y = 121,6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 139 \\ 0,85 \cdot 2x + 0,9 \cdot 3y = 121,6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 139 \\ 1,7x + 2,7y = 121,6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot(-10)} \left. \begin{array}{l} 18x + 27y = 1251 \\ -17x - 27y = -1216 \end{array} \right\} \rightarrow x = 35 \rightarrow y = 23$$

Cada falda costaba 35 € y cada camisa 23 €.

- 93 Un campo de fútbol sala tiene un perímetro de 130 m y una superficie de 1000 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?

Si llamamos x al largo del campo de fútbol sala e y al ancho, en m, obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Perímetro: } 2x + 2y = 130 \\ \text{Superficie: } x \cdot y = 1000 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 65 - y \\ x \cdot y = 1000 \end{array} \right\} \rightarrow (65 - y) \cdot y = 1000 \rightarrow -y^2 + 65y - 1000 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 40 \rightarrow x_1 = 25 \\ y_2 = 25 \rightarrow x_2 = 40 \end{cases}$$

El campo mide 40 m de largo y 25 m de ancho.

- 94) Calcula el largo y el ancho de un rectángulo de 12 dm^2 de área y 5 dm de diagonal.

Si llamamos x a la base del rectángulo e y a la altura, en dm , obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área: } x \cdot y = 12 \\ \text{Diagonal: } \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \end{array} \right\}$$

Elevando al cuadrado y resolviendo por sustitución:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{12}{y} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{12}{y} \right)^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^4 - 25y^2 + 144 = 0 \rightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \\ y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3 \end{cases}$$

Al tratarse de longitudes solo son válidas las soluciones positivas y de ahí: $\begin{cases} y = 4 \rightarrow x = 3 \\ y = 3 \rightarrow x = 4 \end{cases}$
Las dimensiones del rectángulo son $4 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}$.

- 95) Determina la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que:

- Su perímetro mide 50 cm .
- Su altura sobre el lado desigual mide 15 cm .

Si llamamos x a la longitud del lado desigual e y a la de los lados iguales, en cm , obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Perímetro: } x + 2y = 50 \\ \text{Altura: } \sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 15 \end{array} \right\}$$

Elevando al cuadrado y resolviendo por sustitución:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 225 \end{array} \right\} \xrightarrow{-4} \left. \begin{array}{l} x = 50 - 2y \\ 4y^2 - x^2 = 900 \end{array} \right\} \rightarrow 4y^2 - (50 - 2y)^2 = 900 \rightarrow 200y = 3400 \rightarrow y = 17 \rightarrow x = 16$$

Los lados iguales miden 17 cm y el lado desigual 16 cm .

- 96) Halla dos números cuya suma valga $\frac{21}{4}$ y cuyos inversos sumen $\frac{7}{4}$.

Si llamamos x al primer número e y al segundo, obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Suma de los números: } x + y = \frac{21}{4} \\ \text{Suma de sus inversos: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{4} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \frac{21}{4} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sust.}} \left. \begin{array}{l} y = \frac{21}{4} - x \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{21}{4} - x} = \frac{7}{4} \end{array} \right\} \rightarrow 4 \cdot (21 - 4x) + 4 \cdot 4x = 7x \cdot (21x - 4x) \rightarrow 28x^2 - 147x + 84 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 4,5975 \rightarrow y_1 = \frac{261}{400} \\ x_2 = 0,6525 \rightarrow y_2 = \frac{1839}{400} \end{cases}$$

- 97 Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. ¿Cuánto tardará cada uno por separado si con los dos abiertos el depósito se llena en 4 min?

Si llamamos x a lo que tarda el grifo de menor caudal y y a lo que tarda el de mayor caudal, en min, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caudales: } x = 2y \\ \text{Llenado en un minuto: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

Quitando denominadores y resolviendo por sustitución:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 4xy} \left. \begin{array}{l} x = 2y \\ 4y + 4x = xy \end{array} \right\} \rightarrow 4y + 4 \cdot 2y = 2y \cdot y \rightarrow 2y^2 - 12y = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow \text{No válida} \\ y = 6 \rightarrow x = 12 \end{cases}$$

Un grifo tardaría 12 minutos y el otro 6 minutos.

- 98 Felipe está haciendo el Camino de Santiago y ha observado que camina a una velocidad de entre 4 km/h y 6 km/h, según la etapa. Además, suele parar una hora a descansar a lo largo del recorrido. ¿Cuánto tiempo le puede llevar una etapa de 22 km?

Si llamamos x al tiempo que está caminando Felipe, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$4 \leq \frac{22}{x} \leq 6$$

Como x es positivo, si multiplicamos toda la desigualdad por x :

$$4x \leq 22 \leq 6x \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x \leq 22 \rightarrow x \leq \frac{11}{2} \rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{11}{2}\right] \\ 6x \geq 22 \rightarrow x \geq \frac{11}{3} \rightarrow x \in \left[\frac{11}{3}, +\infty\right) \end{array} \right\} \rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{11}{2}\right] \cap \left[\frac{11}{3}, +\infty\right) = \left[\frac{11}{3}, \frac{11}{2}\right]$$

Sin contar el descanso tarda entre 3 horas y 40 minutos, $\frac{11}{3}$ h, y 5 horas y 30 minutos, $\frac{11}{2}$ h.

En total la etapa le puede llevar entre 4 horas y 40 minutos y 6 horas y 30 minutos.

- 99 Amalia ha llamado al servicio técnico para que le vengan a casa a reparar la caldera. Le han dicho que le cobrarán 25 €/h por la mano de obra y 10 € de desplazamiento más el IVA. El técnico ha estimado que la reparación costará entre 55 € y 60 €. ¿Cuánto tiempo espera tardar el técnico en arreglar la avería?

(Dato: IVA = 21 %).

Si llamamos x al tiempo, en h, que dedica el técnico, tendrá que pagar:

$$55 \leq 1,21 \cdot (25x + 10) \leq 60$$

Resolviendo:

$$55 \leq 30,25x + 12,1 \leq 60 \rightarrow 42,9 \leq 30,25x \leq 47,9 \rightarrow \frac{42,9}{30,25} \leq x \leq \frac{47,9}{30,25}$$

El tiempo dedicado estará entre: $\frac{42,9}{30,25} \approx 1,42$ h y $\frac{47,9}{30,25} \approx 1,58$ h

Espera tardar en torno a una hora y media.



FACTURA			
Descripción del servicio	Cantidad de horas	Precio	Total
Reparación del servicio	x	25 €/h	x
Desplazamiento		10 €	x
IVA		21 %	x